11 marzo 2025

Esempi (sul metodo di somiglianza)

- $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ ⊙ $\qquad b(t) = \underbrace{3}_{\text{polinomio di grado } 0}\underbrace{e^{2t}}_{e^{\lambda t}}$

$\lambda = 2$

$\uparrow$

NON è radice di P

$\Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow t^m \equiv 1$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

radici $1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

le teor. garantisce l'esistenza di una soluzione di ⊙ della forma

$$\varphi(t) = \underbrace{a}_{\substack{\text{pol.} \\ \text{di grado} \\ 0}}\,\underbrace{e^{2t}}\cdot\underbrace{1}_{\text{"correzione"}} = a e^{2t}$$

Determino la costante a imponendo che φ risolva ⊙

Calcolo $\varphi'(t) = 2ae^{2t}$, $\varphi''(t) = 4ae^{2t}$

Sostituisco in ⊙ :

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\quad \varphi''(t) - 2\varphi'(t) - 3\varphi(t) = 3e^{2t}$

" : $\quad 4a\cancel{e^{2t}} - 2\cdot 2a\cancel{e^{2t}} - 3ae^{2t} = 3e^{2t}$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\quad -3ae^{2t} = 3e^{2t}$

~~$\forall t \in \mathbb{R}$~~ : $\quad -3a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$

$\Rightarrow \quad \varphi(t) = -e^{2t} \quad$ è sol. di ⊙

L'integrale generale di ⊙ è

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

□

- $$y'' - y' - 2y = \underbrace{-2t + 4t^2}_{=: b(t) \,=\, (\text{pol. di grado } 2)\cdot e^{0t}} \qquad ⊙$$

$\lambda = 0$ radice di p? No!

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$

$(\Rightarrow t^m \equiv 1)$

radici: $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Per il teorema, esiste una sol. di ⊙ della forma

$$\psi(t) = (at^2 + bt + c)\cdot e^{0t} \cdot 1 = at^2 + bt + c$$

Determino i coefficienti a, b, c imponendo che ψ risolva ⊙.

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\quad \psi'(t) = 2at + b, \quad \psi''(t) = 2a$

$$2a - (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = -2t + 4t^2 + 0 \qquad ⊙⊙$$

Per il principio di identità dei polinomi, ⊙⊙ è soddisfatta $\forall t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\begin{cases} -2a = 4 \\ -2a - 2b = -2 \quad (a + b = 1) \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$a = -2$

$b = 1 - a = 3$

$c = \dfrac{2a - b}{2} = \dfrac{-4-3}{2} = -\dfrac{7}{2}$

Soluzione di ⊙:

$$\psi(t) = -2t^2 + 3t - \frac{7}{2} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Integrale generale di $\odot$:

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 2t^2 + 3t - \frac{7}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

- $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 9$ radici $\pm 3i$

$$b(t) = t^2 e^{3t} + \underbrace{6}_{e^{\lambda t}}$$

$e^{\lambda t}$ $\qquad$ $e^{\lambda t}$

$\lambda = 3$ $\qquad$ $\lambda = 0$

diversi!

Pongo $b_1(t) := t^2 e^{3t}$, $b_2(t) = 6$ e risolvo separatamente le equazioni:

$$\dots = b_1(t) \quad , \quad \dots = b_2(t)$$

Per il principio di sovrapposizione, sommando le due soluzioni otterrò una sol. di $\dots = b(t)$.

Cerco una sol. di $\dots = b_1(t) = \underbrace{t^2}_{\text{pol. di grado 2}} \underbrace{e^{3t}}_{e^{\lambda t}}$

$e^{\lambda t}$, $\lambda = 3$

$P(3) = 0$? No!

della forma

$$\varphi_1(t) = (at^2 + bt + c)e^{3t}$$

Impongo che φ_1 risolva $\dots = b_1(t)$:

$$\varphi_1'(t) = (2at + b)e^{3t} + 3(at^2 + bt + c)e^{3t}$$

$$\overbrace{2a e^{3t} + 3(2at+b)e^{3t} + 3(2at+b)e^{3t} + 9(at^2+bt+c)e^{3t}}^{\varphi_1''(t)}$$

$$+ 9 \underbrace{(at^2 + bt + c)e^{3t}}_{\varphi_1(t)} = t^2 e^{3t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$2a e^{3t} + 6(2at+b)e^{3t} + 18(at^2+bt+c)e^{3t} = t^2 \underbrace{e^{3t}}_{\neq 0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \quad 2a + 6(2at+b) + 18(at^2+bt+c) = t^2 + 0\cdot t + 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per il P.I.P. questo è vero se e solo se

$$\begin{cases} 18a = 1 \\ 12a + 18b = 0 \\ 2a + 6b + 18c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{18}$$

$$b = -\frac{12a}{18} = -\frac{2}{3}a = -\frac{1}{27}$$

$$c = -\frac{a+3b}{9} = -\frac{\frac{1}{18}-\frac{1}{9}}{9} = +\frac{1}{9\cdot 18} = \frac{1}{162}$$

$\dots = b_1(t)$ è risolta da

$$\psi_1(t) = \left(\frac{t^2}{18} - \frac{t}{27} + \frac{1}{162}\right)e^{3t}$$

Cerco una sol. di $\dots = b_2(t) = \underbrace{6}_{\text{pol. di grado } 0} \cdot e^{0t}$ $\quad P(0) \neq 0$

della forma

$$\psi_2(t) = a\cdot e^{0t} = a$$

$$\psi_2'(t) = 0, \quad \psi_2''(t) = 0$$

$$0 + 9a = 6 \quad \iff \quad a = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \quad \psi_2(t) = \frac{2}{3}$ è sol. di $\dots = b_2(t)$

Integrale generale di: $\dots = b(t)$

$$\underbrace{c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t)}_{\text{int. gen. di: } \dots = 0} + \underbrace{\left(\frac{t^2}{18} - \frac{t}{27} + \frac{1}{162}\right)e^{3t}}_{\text{int. part. di: } \dots = t^2e^{3t}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{int. part. di } \dots = 6}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

1. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ ⊙

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$ radice $\lambda = -1$ con molteplicità 2

Int. gen. dell'eq. om. associata:

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Cerco sol. di $\ldots = \underbrace{2}_{\text{pol. grado } 0}\underbrace{e^{-t}}_{e^{\lambda t}}$

della forma

$\lambda = -1$

$m = 2$

$$\varphi(t) = a e^{-t} t^2$$

Impongo che sia soluzione:

$$\varphi'(t) = -a e^{-t} t^2 + 2a e^{-t} t$$

$$\overbrace{a e^{-t} t^2 - 2a e^{-t} t - 2a e^{-t} t + 2a e^{-t}}^{\varphi''(t)} +$$

$$2\underbrace{(-a e^{-t} t^2 + 2a e^{-t} t)}_{\varphi'(t)} + \underbrace{a e^{-t} t^2}_{\varphi(t)} = 2e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$e^{-t} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\cancel{at^2} - \cancel{4at} + 2a - \cancel{2at^2} + \cancel{4at} + \cancel{at^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = t^2 e^{-t} \quad \text{è sol. di } ⊙$$

Int. gen. di ⊙ :

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t^2 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

- $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2t)$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$ radici $-1 \pm 2i$ $\quad \alpha = -1$, $\beta = 2$

Int. gen. dell' omog. associata:

$c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Cerco una sol. di

$$\ldots = 3\sin(2t) = e^{\overset{\alpha=0}{0}t}\underbrace{3}_{\substack{\text{pol.}\\ \text{grado}\\ 0}}\sin(\overset{\beta=2}{2}t) + e^{0t}\cdot\underbrace{0}_{\substack{\text{pol.}\\ \text{grado}\\ 0}}\cdot\cos(2t)$$

della forma

$P(0+i2) = 0$?? No!

$$\varphi(t) = e^{0t}\left(a\sin(2t) + b\cos(2t)\right)\cdot 1$$

$$= a\sin(2t) + b\cos(2t)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $\quad \varphi'(t) = 2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)$

$$\overbrace{-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}^{\varphi''(t)} + 2\overbrace{(2a\cos(2t) - 2b\sin(2t))}^{\varphi'(t)} +$$

$$+ 5\underbrace{(a\sin(2t) + b\cos(2t))}_{\varphi(t)} = 3\sin(2t)$$

$$\underline{-4a\sin(2t)} - \underline{4b\cos(2t)} + \underline{4a\cos(2t)} - \underline{4b\sin(2t)} +$$

$$+ \underline{5a\sin(2t)} + \underline{5b\cos(2t)} = \underline{3\sin(2t)} + 0\cos(2t)$$

$$\begin{cases} -4a - 4b + 5a = 3 \\ -4b + 4a + 5b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 4b = 3 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 17a = 3 \\ b = -4a \end{matrix}$$

$$a = \frac{3}{17}, \qquad b = -\frac{12}{17}$$

$\Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t)$ è sol

dell'eq. completa

In t. gen. dell'eq. assegnata:

$$c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Es.

$$x'' + 2\underbrace{\gamma}_{\geq 0} x' + \underbrace{\omega_0^2}_{>0} x = \overbrace{\underbrace{\delta}_{>0}}^{\text{pol. grado } 0} \sin(\underbrace{\omega}_{>0} t) \cdot e^{0t}$$

0 + iω

Se $\gamma > 0$: il pol. caratt. ha

- radici complesse con parte reale $-\gamma < 0$
- radici reali coincidenti
- radici reali distinte

a seconda del segno di Δ.

$\Rightarrow$ in ogni caso, $i\omega$ <u>non</u> è radice di P

$\Rightarrow$ l'eq. ha una sol. particolare di tipo

$$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

Se $\gamma = 0$: $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$

ha radici $\pm i\omega_0$

$(m=0)$

se $\omega \neq \omega_0$: $P(i\omega) \neq 0 \Rightarrow$

l'eq. ha sol. particolare del tipo

$$\underbrace{a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)}$$

Int. gen:

$$c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) +$$

Se $\omega = \omega_0$: $P(i\omega) = P(i\omega_0) = 0$

$\Rightarrow$ l'eq. completa ha una sol del tipo

$$(a\sin(\omega_0 t) + \underbrace{b\cos(\omega_0 t)) t}$$

Int. gen:

$$c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \text{----}$$

$$= (c_1 + bt)\cos(\omega_0 t) + (c_2 + at)\sin(\omega_0 t)$$

- $y'' - 4y' + 4y = (t^2+t)e^{-t}$ $\quad y(0)=0, \quad y'(0) = -1$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

radice $\lambda = 2$ con moltepliCità 2

Cerco sol. di: $\ldots = \underbrace{(t^2+t)}_{\text{pol. grado 2}}\underbrace{e^{-t}}_{e^{\lambda t},\ \lambda=-1,\ P(-1)\neq 0}$

della forma $\varphi(t) = (at^2+bt+c)e^{-t}$

Calcolo: $\varphi'(t) = (2at+b)e^{-t} - (at^2+bt+c)e^{-t}$

$$2a e^{-t} - (2at+b)e^{-t} - (2at+b)e^{-t} + (at^2+bt+c)e^{-t} +$$
$$- 4(2at+b)e^{-t} + 4(at^2+bt+c)e^{-t} +$$
$$+ 4(at^2+bt+c)e^{-t} = (t^2+t)e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a - 2(2at+b) + (at^2+bt+c) - 4(2at+b) +$$
$$+ 8(at^2+bt+c) = t^2+t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 9(at^2+bt+c) - 6(2at+b) + 2a = t^2+t+0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

P.I.P.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 1 \\ 9b - 12a = 1 \\ 9c - 6b + 2a = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{9}$$
$$b = \frac{1+12a}{9} = \frac{1+\frac{4}{3}}{9} = \frac{7}{27}$$
$$c = \frac{6b-2a}{9} = \frac{\frac{14}{9}-\frac{2}{9}}{9} = \frac{4}{27}$$

$\Rightarrow \varphi(t) = \left(\frac{t^2}{9} + \frac{7}{27}t + \frac{4}{27}\right)e^{-t}$ è sol. part.

Int. generale:

$$\varphi_c(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \left(\frac{t^2}{9} + \frac{7}{27}t + \frac{4}{27}\right)e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Impongo le condizioni iniziali:

$$\varphi_c(0) = 0, \qquad \varphi_c'(0) = -1$$

$$\begin{cases} c_1 + \frac{4}{27} = 0 \\ 2c_1 + c_2 + \frac{7}{27} - \frac{4}{27} = -1 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{4}{27}$$

$$c_2 = -1 - \frac{1}{9} - 2c_1 = -\frac{10}{9} + \frac{8}{27} = -\frac{22}{27}$$

La sol. del PdC è

$$\varphi(t) = -\frac{4}{27} e^{2t} - \frac{22}{27} t e^{2t} + \left(\frac{t^2}{9} + \frac{7}{27} t + \frac{4}{27} \right) e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- $y'' - 3y' + 2y = 10\cos(t) + e^t$ $\qquad y(0) = 3$, $\; y'(0) = -1$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

radici: $\lambda = 1$, $\lambda = 2$

Sol. di $\ldots = 10\cos(t) \cdot e^{0t}$ $\qquad 0 + i1 = i$

della forma $\varphi_1(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$

$$\varphi_1'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$$

$$-a\cos(t) - b\sin(t) - 3(-a\sin(t) + b\cos(t)) + 2(a\cos(t) + b\sin(t)) = 10\cos(t) + 0\sin(t)$$

$$\begin{cases} -a - 3b + 2a = 10 \\ -b + 3a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 3b = 10 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 9a = 10 \\ b = -3a \end{cases}$$

$$a = 1, \quad b = -3$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \cos(t) - 3\sin(t)$$

Cerco sol. di $\dots = e^t = \underbrace{1}_{\text{pol. grado } 0} \cdot e^{1t}$ $\quad \lambda = 1$, $m = 1$

della forma

$$\psi_2(t) = a e^t t$$

Calcolo $\psi_2'(t) = a e^t t + a e^t$

$$a e^t t + a e^t + a e^t - 3(a e^t t + a e^t) + 2 a e^t t = e^t \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{at} + 2a - 3\cancel{at} - 3a + 2\cancel{at} = 1$$

$$a = -1$$

$$\Rightarrow \psi_2(t) = -t e^t$$

Int. generale:

$$\varphi_c(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \cos(t) - 3\sin(t) - t e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Impongo $\varphi(0) = 3$, $\varphi'(0) = -1$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 3 \\ c_1 + 2c_2 - 3 - 1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases}$$

$$c_2 = 1 \qquad c_1 = 1$$

La sol. del PdC. è

$$\varphi(t) = e^t + e^{2t} + \cos(t) - 3\sin(t) - t e^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\square$