7 marzo 2025

Esempi

- $y'' + 4y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4$

radici $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

$\alpha = 0$

$\beta = \pm 2$

Sol. <u>complesse</u> :

$$z_1(t) = e^{2it} = \underbrace{e^{0t}}_{=1} (\cos(2t) + i \sin(2t)) = \cos(2t) + i \sin(2t)$$

$$z_2(t) = e^{-2it} = \underbrace{e^{0t}}_{=1} (\cos(-2t) + i \sin(-2t))$$

$$= \cos(-2t) + i \sin(-2t) = \cos(2t) - i \sin(2t)$$

$$= \overline{z_1(t)} =: \overline{z}_1(t)$$

oss.

$\Rightarrow$ sol. (reali) :

$$\varphi_1(t) = \cos(2t), \qquad \varphi_2(t) = \sin(2t)$$

- $y'' + 2y' + 5y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$

radici $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5}$

$= -1 \pm \sqrt{-4}$

$= -1 \pm 2i$

$(\alpha = -1, \ \beta = 2)$

Sol: $\varphi_1(t) = e^{-t} \cos(2t)$, $\varphi_2(t) = e^{-t} \sin(2t)$

- $y'' - 6y' + 25y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25$

radici $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-25}$

$= 3 \pm 4i$

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4$$

Sol. : $\varphi_1(t) = e^{3t} \cos(4t)$, $\varphi_2(t) = e^{3t} \sin(4t)$

$\square$

Dimostro il teor. sull'integrale generale.

① Suppongo che p abbia radici reali λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

So (dalla prop.) che le funzioni

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

risolvono l'eq. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ $(*)$

Per il coroll. 1 del principio di sovrapp., so che ogni combinazione lineare (con coefficienti reali) di φ_1 e φ_2 è sol. di $(*)$.

Devo provare il viceversa, cioè che ogni soluzione di $(*)$ è combinazione lineare di φ_1 e φ_2.

Fisso φ sol. di $(*)$.

La tesi è:

$$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underbrace{\varphi}_{\text{sol. di } (*)} = \underbrace{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2}_{\text{sol. di } (*)}$$

Siccome φ e $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ sono sol. della stessa eq. diff. $(*)$, per il teor. di esistenza e unicità, dimostrare che sono uguali equivale a dimostrare che soddisfano le medesime condizioni iniziali.

Dunque la tesi equivale a:

$$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \begin{cases} \varphi(0) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(0) \\ \varphi'(0) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)'(0) \end{cases}$$

$$\iff \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \begin{cases} \varphi(0) = c_1\varphi_1(0) + c_2\varphi_2(0) \\ \varphi'(0) = c_1\varphi_1'(0) + c_2\varphi_2'(0) \end{cases}$$

Quindi: la tesi da dimostrare equivale a dire che il sistema algebrico

$$\odot \begin{cases} \varphi_1(0)\, u + \varphi_2(0)\, v = \varphi(0) \\ \varphi_1'(0)\, u + \varphi_2'(0)\, v = \varphi'(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

ha soluzione.

Nota: questa equivalenza è vera per qualsiasi coppia φ_1, φ_2 di soluzioni di $(*)$, quindi potremo utilizzarla anche nella dim. di ② e ③ (ovviamente, scegliendo φ_1 e φ_2 in modo appropriato).

Riscrivo $\odot$ per $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\varphi_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \Rightarrow \varphi_1(0) = 1 \, , \quad \varphi_1'(0) = \lambda_1$

$\varphi_2'(t) = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \varphi_2(0) = 1 \, , \quad \varphi_2'(0) = \lambda_2$

Sostituisco:

$$\odot = \begin{cases} u + v = \varphi(0) \\ \lambda_1 u + \lambda_2 v = \varphi'(0) \end{cases}$$

moltiplico per λ_1 (λ_2) e sottraggo membro a membro

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1) u = \lambda_2 \varphi(0) - \varphi'(0) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) v = \lambda_1 \varphi(0) - \varphi'(0) \end{cases}$$

Oss: entrambe le equazioni hanno (un'unica) soluzione perché $\lambda_2 - \lambda_1$ e $\lambda_1 - \lambda_2$ sono diversi da 0 in quanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

La dim. di 1 è conclusa.

2 Suppongo che P abbia una radice reale λ di molteplicità 2.

Dalla Prop. so che $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$ è sol. di (*).

Determino una sol. di (*) mediante il metodo di riduzione dell'ordine:

Cerco una soluzione di (*) del tipo

$$\psi(t) = c(t)\, \varphi_1(t)$$

con $c = c(t)$ da determinare imponendo che ψ risolva (*).

Calcolo ψ' e ψ'' (ometto la dipendenza da t):

$$\psi' = c'\varphi_1 + c\varphi_1' \, , \quad \psi'' = c''\varphi_1 + c'\varphi_1' + c'\varphi_1' + c\varphi_1''$$

Sostituisco nell' equazione:

$$c''\varphi_1 + 2\underbrace{c'\varphi_1'} + \underbrace{c\varphi_1''} + a_1(\underbrace{c'\varphi_1} + \underbrace{c\varphi_1'}) + a_0 \underbrace{c\varphi_1} \equiv 0$$

$$\iff c(\underbrace{\varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_0\varphi_1}_{\equiv 0}) + c'(\underbrace{2\varphi_1' + a_1\varphi_1}_{?\ \equiv 0}) + c''\varphi_1 \equiv 0$$

$\equiv 0$ perché φ_1 è sol. di $(*)$

$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$

$2\varphi_1'(t) + a_1\varphi_1(t) =$

$2\lambda e^{\lambda t} + a_1 e^{\lambda t} = (2\lambda + a_1)e^{\lambda t}$

λ radice di P

$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \qquad \Delta = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow 2\lambda = -a_1$

$\Rightarrow 2\lambda + a_1 = 0$

$$\iff c''\underbrace{\varphi_1}_{e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t} \equiv 0 \iff c'' \equiv 0$$

Ricapitolando: se scelgo una qualsiasi funzione c (derivabile due volte) t.c. $c''(t) = 0 \ \forall t$, ottengo una soluzione

$$\psi(t) = c(t)\varphi_1(t)$$

di $(*)$.

Scegliendo $c(t) = t \ \forall t$, ottengo la soluzione

$$\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}.$$

Come nel punto 1: tutte le combinazioni lineari di φ_1 e φ_2 risolvono $(*)$; dobbiamo dimostrare che ogni sol. di $(*)$ è combinazione lineare di φ_1 e φ_2.

Come osservato, questo equivale a provare che, fissata una sol. φ, il sistema

$$\odot \begin{cases} \varphi_1(0)\, u + \varphi_2(0)\, v = \varphi(0) \\ \varphi_1'(0)\, u + \varphi_2'(0)\, v = \varphi'(0) \end{cases}$$

ha soluzioni.

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi_1'(t) = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = \lambda$$

$$\varphi_2(t) = t e^{\lambda t}, \quad \varphi_2'(t) = e^{\lambda t} + t \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1$$

$$\odot = \begin{cases} u = \varphi(0) \\ \lambda u + v = \varphi'(0) \end{cases} \Leftrightarrow \quad v = \varphi'(0) - \lambda \varphi(0)$$

che ha (un'unica) soluzione.

La dim. di 2 è conclusa.

3 Suppongo che p abbia radici complesse

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta \qquad (\beta \neq 0)$$

Sappiamo che

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \qquad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

sono sol. di $(*)$, quindi le loro combinazioni lineari sono sol.

Per il viceversa: fisso φ sol. e verifico che

$$\odot \begin{cases} \varphi_1(0)\, u + \varphi_2(0)\, v = \varphi(0) \\ \varphi_1'(0)\, u + \varphi_2'(0)\, v = \varphi'(0) \end{cases}$$

ha soluzioni:

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad \varphi_1'(t) = \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) + e^{\alpha t}(-\beta\sin(\beta t))$$

$$\Rightarrow \varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = \alpha$$

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad \varphi_2'(t) = \alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + e^{\alpha t}(\beta\cos(\beta t))$$

$$\Rightarrow \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = \beta$$

$$\odot = \begin{cases} u = \varphi(0) \\ \alpha u + \underbrace{\beta}_{\neq 0} v = \varphi'(0) \end{cases} \Leftrightarrow v = \frac{\varphi'(0) - \alpha\varphi(0)}{\beta}$$

$\Rightarrow \odot$ ha sol. (unica). $\square$

Esempi

- $y'' - y = 0 \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 1 \qquad \lambda = \pm 1$ reali distinte

  Integrale generale:

  $$\{ c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}, \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

- $y'' - 3y' - 10y = 0 \qquad p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$

  $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -2$

  Int. gen:

  $$\{ c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}, \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

- $y'' + y' = 0 \qquad p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$

radici $0, -1$

Int. gen.

$\{ c_1 + c_2 e^{-t}, \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- $y'' + 2y' + y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

  $\lambda = -1$ molteplicità 2

  Int. gen:

  $\{ c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- $y'' + y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 1$

  $\lambda = \pm i$

  Int. gen:

  $\{ c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- $y'' + 4y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \qquad \lambda = \pm 2i$

  $\{ c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t), \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- $y'' + 2y' + 5y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$

  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

  $\{ c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t), \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

- $y'' - 6y' + 25y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 25$

  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 4i$

  $\{ c_1 e^{3t} \cos(4t) + c_2 e^{3t} \sin(4t), \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

Es:

$$m x'' = -\underbrace{k}_{>0} x - \underbrace{\alpha}_{\geq 0} x'$$

$$m x'' + \alpha x' + k x = 0$$

$$x'' + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{=:2\gamma} x' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{>0} x = 0 \qquad \frac{k}{m} =: \omega_0^2$$

$$x'' + 2\underbrace{\gamma}_{\geq 0} x' + \underbrace{\omega_0^2}_{>0} x = 0$$

1° caso: $\gamma = 0$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$$

radici: $\pm i\omega_0$

Generica soluzione:

$$c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left(= A \sin(\omega_0 t + \varphi) \right)$$

2° caso: $\gamma > 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

$$\frac{\Delta}{4} = \gamma^2 - \omega_0^2$$

- $\Delta < 0$ $\quad (\gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \iff \gamma^2 < \omega_0^2 \iff \gamma < \omega_0)$

radici $\quad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Sol. generica:

$$c_1 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\, t\right) + c_2 e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\, t\right)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $\Delta = 0 \qquad (\gamma = \omega_0)$

radice $\lambda = -\gamma$

Sol. generica:

$$c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}$$

- $\Delta > 0 \qquad (\gamma > \omega_0)$

radici $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ reali < 0

Sol. generica:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\square$