6 marzo 2025

Dimostro il Principio di Sourapposizione

φ_1 soluzione di $y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b_1(t)$

φ_2 soluzione di $y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b_2(t)$

Questo significa che φ_1, φ_2 sono derivabili due volte e che

$$\forall t \in I: \begin{cases} \varphi_1''(t) + a_1(t)\varphi_1'(t) + a_0(t)\varphi_1(t) = b_1(t) \\ \varphi_2''(t) + a_2(t)\varphi_2'(t) + a_0(t)\varphi_2(t) = b_2(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall t \in I: \begin{cases} \alpha_1\varphi_1''(t) + \alpha_1 a_1(t)\varphi_1'(t) + \alpha_1 a_0(t)\varphi_1(t) = \alpha_1 b_1(t) \\ \alpha_2\varphi_2''(t) + \alpha_2 a_1(t)\varphi_2'(t) + \alpha_2 a_0(t)\varphi_2(t) = \alpha_2 b_2(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall t \in I:$

$$\overbrace{\alpha_1\varphi_1''(t) + \alpha_2\varphi_2''(t)}^{\varphi''(t)} + a_1(t)\big(\overbrace{\alpha_1\varphi_1'(t) + \alpha_2\varphi_2'(t)}^{\varphi'(t)}\big) +$$

$$+\ a_0(t)\big(\underbrace{\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)}_{\varphi(t)}\big) = \underbrace{\alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)}_{(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)(t)} \iff$$

$\varphi := \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$

derivabile due volte

$$\forall t \in I: \quad \varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_0(t)\varphi(t) = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)(t)$$

$\iff \varphi$ è soluzione di:

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)(t)$$

$\square$

Dimostro il Corollario 2.

Suppongo $\bar{\varphi}$ sol. dell'eq. $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$

Sia φ_0 sol. dell'eq. omog. associata;

considero $\varphi := \underbrace{\varphi_0}_{\substack{\uparrow\\ \text{risolve l'eq.}\\ \dots = 0}} + \underbrace{\bar{\varphi}}_{\substack{\uparrow\\ \text{risolve l'eq.}\\ \dots = b(t)}}$

Per il principio di sovrapposizione:

φ risolve l'eq. con termine noto $0 + b = b$

quindi è sol. dell'eq. completa.

Viceversa: sia φ sol. dell'eq. completa.

Scrivo

$$\varphi = \underbrace{\varphi - \bar{\varphi}}_{\uparrow} + \underbrace{\bar{\varphi}}_{\checkmark}$$

φ sol. $\dots = b$

$\bar{\varphi}$ sol. $\dots = b$

prima sarebbe $\Rightarrow$ $\varphi - \bar{\varphi}$ sol. $\dots = b - b = 0$

Quindi: $\varphi - \bar{\varphi}$ è sol. dell'eq. omogenea. $\square$

Dimostro il lemma.

Considero $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ $\quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Fisso $\lambda \in \cancel{\mathbb{R}}$ $\mathbb{C}$ e definisco $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

derivabile indefinitamente

Risulta:

$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\varphi''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

φ soluzione di $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ $\iff$

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \varphi''(t) + a_1 \varphi'(t) + a_0 \varphi(t) = 0 \quad \iff$

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad \iff$

$\forall t \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{e^{\lambda t}}_{\substack{\neq 0 \\ \forall t}} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \quad \iff$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$\square$

Esempi

- $y'' - y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 1$

radici: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ l'eq. diff. ha sol. $\varphi_1(t) = e^{t}$, $\varphi_2(t) = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$

- $y'' + y' = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$

radici: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ l'eq. diff. ha sol. $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$

- $y'' - 3y' - 10y = 0$ $\qquad P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$

radici $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ l'eq. diff. ha sol. $\varphi_1(t) = e^{5t}$, $\varphi_2(t) = e^{-2t}$

• $y'' + 2y' + y = 0$ $\quad P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

radice $\lambda = -1$ (molteplicità 2)

$\Rightarrow$ l'eq. diff. ha sol. $\varphi(t) = e^{-t}$.

Esempio

$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}^*$

$z(t) = e^{\lambda t} := e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$

Parte reale di z:

$u(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, derivabile in $\mathbb{R}$

Parte immaginaria di z:

$v(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, derivabile in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ z è derivabile in $\mathbb{R}$.

Calcolo z'. Per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$z'(t) \overset{\text{def}}{=} u'(t) + i\, v'(t)$$

$-1 = i^2$

$$= \underline{\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t)} + e^{\alpha t}(-\underline{\beta \sin(\beta t)}) +$$
$$i\left(\underline{\alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t)} + e^{\alpha t}\underline{\beta \cos(\beta t)}\right)$$

$$= \alpha\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) +$$
$$+ i\beta\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)$$

$= (e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i e^{\alpha t}\sin(\beta t))(\alpha + i\beta)$

$= \lambda z(t)$ $\square$

Es.: $\varphi(t) = e^{it}$ $(= \underbrace{\cos(t)}_{} + i \underbrace{\sin(t)}_{})$

$\varphi'(t) = i e^{it}$

$\varphi''(t) = i (i e^{it}) = - e^{it}$

$\varphi''(t) + \varphi(t) = - e^{it} + e^{it} = 0$

$\Rightarrow \varphi$ risolve $y'' + y = 0$ $\square$

Verifico che $z = u + iv$ è sol. complessa di

$(*)$ $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ $(a_0, a_1 \in \mathbb{R})$

se e solo se u e v sono sol. reali della stessa equazione.

Anzitutto: z deriv. due volte $\Leftrightarrow$ u, v deriv. due volte

Poi:

z sol. complessa di $(*)$ $\Leftrightarrow$

$\forall t \in \mathbb{R}$: $0_{\mathbb{C}} = 0 + i0 =$

$z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) =$

$(u''(t) + i v''(t)) + a_1 (u'(t) + i v'(t)) + a_0 (u(t) + i v(t)) =$

$(u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t)) + i(v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t))$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}: \quad \begin{cases} u''(t) + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = 0_{\mathbb{R}} \\ v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ u, v risolvono l'eq. $(*)$. $\square$