4 marzo 2025

$$y' + ty = 0 \qquad (*)$$

? $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(t) = 5t$ è soluzione di $(*)$?

- φ è derivabile? sì!
- $\forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi'(t) + t\,\varphi(t) = 0$? No!

Provo:

$$\varphi'(t) + t\varphi(t) = 5 + t \cdot 5t = 5 + 5t^2 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dimostro il Teorema.

Supposto che $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sia soluzione dell'eq. diff.

$$(1) \qquad y' + a(t)\,y = b(t)$$

Questo vuole dire che φ è derivabile in I e

$$\forall t \in I : \quad \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t) \qquad (*)$$

$\leftarrow$ perché $e^{A(t)} \neq 0 \ \forall t \in I$

$(*)$ equivale a dire che

$$\forall t \in I : \quad e^{A(t)}\left(\varphi'(t) + a(t)\varphi(t)\right) = e^{A(t)} b(t) \iff$$

$$\forall t \in I : \quad e^{A(t)}\varphi'(t) + e^{A(t)} a(t)\,\varphi(t) = e^{A(t)} b(t) \iff$$

$$\forall t \in I : \quad e^{A(t)}\varphi'(t) + \underbrace{e^{A(t)} A'(t)}_{=\left(e^{A(t)}\right)'}\varphi(t) = e^{A(t)} b(t) \iff$$

$\forall t \in I \quad \frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}\varphi(t)\right) = e^{A(t)} b(t) \quad \Leftrightarrow$

la funzione $t \in I \mapsto e^{A(t)}\varphi(t)$ é una primitiva della funzione $\underbrace{t \in I \mapsto e^{A(t)} b(t)}_{\odot}$

Per ipotesi, anche γ è primitiva di $\odot$ nell'intervallo I, quindi:

$\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $e^{A(t)}\varphi(t) = \gamma(t) + c \quad \forall t \in I$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\varphi(t) = e^{-A(t)}(\gamma(t) + c) \quad \forall t \in I.$

$\square$

Esempi

- $y' + ty = 0 \qquad y(1) = 2$

$a(t) = t \qquad b(t) \equiv 0 \qquad t \in \mathbb{R}$

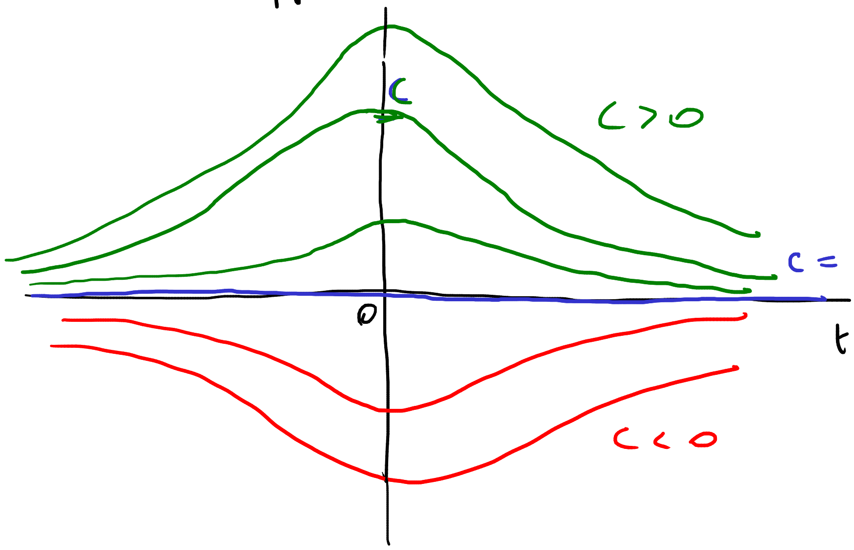
- Cerco A t.c. $A'(t) = t$; scelgo $A(t) = \frac{t^2}{2}$.
- Cerco γ t.c. $\gamma'(t) = 0$; scelgo $\gamma(t) \equiv 0$

La generica soluzione dell'eq. assegnata è

$$\varphi_c(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} c = c\, e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad t \in \mathbb{R}$$

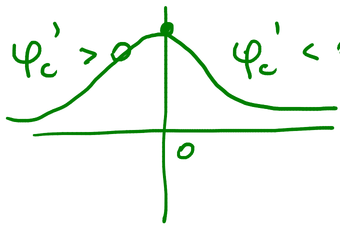
al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Provo a rappresentarle:



Oss: $\forall t$: $\varphi_c'(t) + t\,\varphi_c(t) = 0$

$$\varphi_c'(t) = -t\,\underbrace{\varphi_c(t)}_{>0}$$



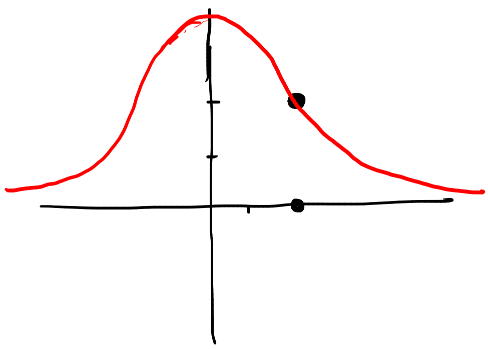
Risolvo il PdC con condizione iniziale

$$y(1) = 2.$$

Impongo $\varphi_c(1) = 2 \iff$

$$c\,e^{-\frac{1}{2}} = 2 \iff$$

$$c = 2e^{1/2}$$



La sol. del PdC è $\varphi(t) = 2\sqrt{e}\,e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

- $y' - \sin(t)\,y = 0$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$a(t) = -\sin(t)$ $b(t) \equiv 0$ $t \in \mathbb{R}$

Cerco A t.c. $A'(t) = -\sin(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$;

scelgo $A(t) = \cos(t)$

Cerco γ t.c. $\gamma'(t) = 0$; scelgo $\gamma(t) = 0$

La generica soluzione dell'eq. assegnata è

$$\varphi_c(t) = c e^{-\cos(t)} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Risolvo il PdC:

$$c e^{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 \iff c = -1$$

La sol. del PdC è $\varphi(t) = -e^{-\cos(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. □

- $y' - e^{t^2} y = 0 \qquad y(0) = -2$

$a(t) = -e^{t^2}$, $\quad b(t) \equiv 0 \quad t \in \mathbb{R}$

Cerco A t.c. $A'(t) = -e^{t^2}$; scelgo $A(t) = \int_0^t -e^{s^2} ds$

Cerco γ t.c. $\gamma'(t) \equiv 0$; scelgo $\gamma(t) \equiv 0$

La generica soluzione è

$$\varphi_c(t) = c e^{-A(t)} = c e^{\int_0^t e^{s^2} ds} \qquad t \in \mathbb{R}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Impongo

$$y(0) = -2 \iff c e^{\int_0^0 e^{s^2} ds} = -2$$

$$\iff c e^0 = -2 \iff c = -2$$

La sol. del PdC è

$$\varphi(t) = -2\, e^{\int_0^t e^{s^2} ds} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Scelgo A diversamente: $A(t) = \int_{-1}^t -e^{s^2} ds$

$$\Rightarrow \quad \varphi_c(t) = c\, e^{\int_{-1}^t e^{s^2} ds}$$

Impongo $\varphi_c(0) = -2 \iff$

$$c\, e^{\int_{-1}^0 e^{s^2} ds} = -2 \iff c = -2\, e^{-\int_{-1}^0 e^{s^2} ds}$$

$\Rightarrow$ la sol. è

$$\varphi_c(t) = -2\, e^{-\int_{-1}^0 e^{s^2} ds}\, e^{\int_{-1}^t e^{s^2} ds}$$

$$= -2\, e^{-\int_{-1}^0 e^{s^2} ds + \int_{-1}^t e^{s^2} ds}$$

$$= -2\, e^{\int_0^{-1} e^{s^2} ds + \int_{-1}^t e^{s^2} ds} = \underbrace{-2\, e^{\int_0^t e^{s^2} ds}}_{\text{quello di prima!}}$$

- $y' + \tan(t)\, y = 0 \qquad y(\pi) = 3$

$b(t) \equiv 0, \quad a(t) = \tan(t) \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Tenuto conto della condizione iniziale, studio l'equazione in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Cerco A t.c. $A'(t) = \tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$;

scelgo $A(t) = -\ln|\cos(t)| = -\ln(-\cos(t))$

$\uparrow$
$t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

Scelgo $\gamma \equiv 0$; la sol. generica è

$$\varphi_c(t) = c\, e^{-A(t)} = c\, e^{\ln(-\cos(t))}$$

$$= c\,(-\cos(t)) = -c\cos(t)$$

$$= c\cos(t)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Impongo $y(\pi) = 3 \iff$

$$c\cos(\pi) = 3 \iff c = -3$$

La sol. del PdC è $\varphi(t) = -3\cos(t)$, ~~$t \in \mathbb{R}$~~

$t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$

- $y' + \frac{2}{t} y = 4t \qquad y(1) = 2$

$a(t) = \frac{2}{t}$, $\quad b(t) = 4t \qquad t \neq 0 \iff t \in \mathbb{R}^*$

Studiamo l'eq. in $(0, +\infty)$

Cerco A t.c. $A'(t) = \frac{2}{t}$; scelgo $A(t) = 2\ln|t|$
$= \ln(t^2)$

Cerco γ t.c. $\gamma'(t) = e^{A(t)}\, b(t)$
$= t^2 \cdot 4t = 4t^3$;

scelgo $\gamma(t) = t^4$.

La generica sol. è

$$\varphi_c(t) = e^{-A(t)}(\gamma(t) + c) = \frac{1}{t^2}(t^4 + c)$$
$$= t^2 + \frac{c}{t^2} \qquad t \in (0, +\infty)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$

Risolvo il PdC:

$$y(1) = 2 \iff 1 + \frac{c}{1} = 2 \iff c = 1$$

La sol. del PdC è $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t \in (0, +\infty)$.

Rappresento le soluzioni:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

$$y' = 4t - \frac{2}{t}y$$
$$= \frac{4t^2 - 2y}{t}$$
$$= \underbrace{\frac{2}{t}}_{>0}\,(\underbrace{2t^2 - y}_{\geq 0})$$

$y \leq 2t^2$