17 maggio 2024

Esempi (sul TML)

- $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - x \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

  $Z = \{ (x,y) \mid \underbrace{x^2+y^2-1}_{=:\, g(x,y)} = 0 \}$

Definisco la funzione $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$
$$= 2x^2 + y^2 - x - \lambda (x^2+y^2-1)$$

Cerco i punti stazionari di L:

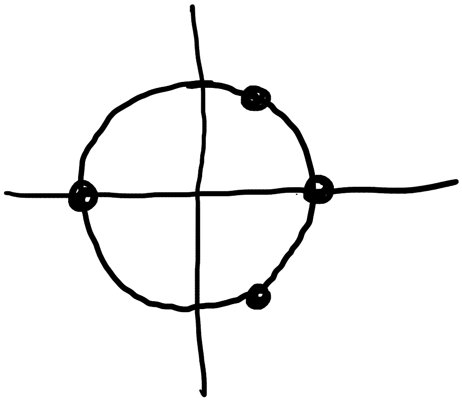
$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 4x - 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 2y - \lambda \cdot 2y = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2+y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 1 - \lambda\, 2x = 0 \\ 2y(1-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \iff \underset{1}{y=0} \text{ opp. } \underset{2}{1-\lambda = 0}$$

1 $\begin{cases} 4x - 1 - \lambda\, 2x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1 \end{cases} \longrightarrow (\pm 1, 0)$

(potrei ricavare λ dalla 1ª equazione, ma non mi interessa)

2 $\begin{cases} 4x - 1 - 2x = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \\ y^2 &= 1 - x^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} \\ y &= \pm \sqrt{\tfrac{3}{2}} \end{aligned}$



$\rightarrow \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

Ritroviamo (ovviamente!) i punti noti.

Confrontando il valore di f nei punti trovati, si determina $\max f$, $\min f$.

Oss:

Fisso $c \in \mathbb{R}$ e considero

$$E_c := \{ (x,y) \mid f(x,y) = c \}$$

(insieme di livello di f)

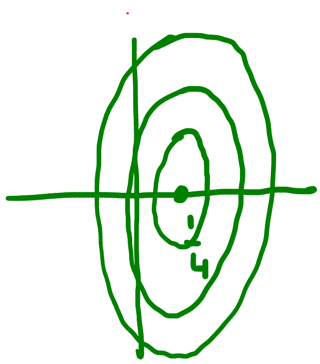
$$\Updownarrow$$

$$2x^2 + y^2 - x = c$$

$$x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{c}{2}$$

$$x^2 - 2x\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{y^2}{2} = \frac{c}{2}$$

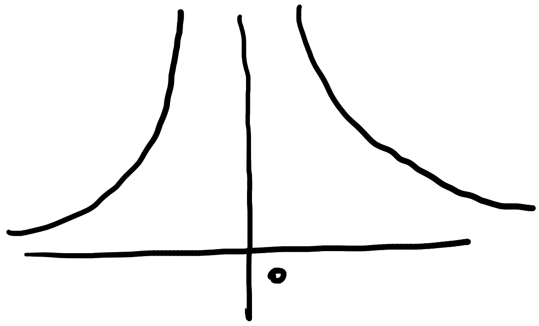
$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{1}{16} > 0$$



$$\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{c}{2} + \frac{1}{16}} + \frac{y^2}{2\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{16}\right)} = 1$$

- Determinare la minima distanza tra $(0,0)$ e $\{ (x,y) \mid \underbrace{x^2 y - 16}_{g(x,y)} = 0 \} =: Z$

$$x^2 y - 16 = 0 \iff y = \frac{16}{x^2}$$



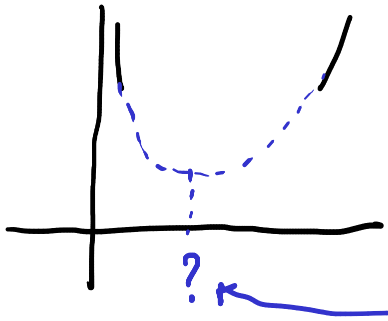
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

quadrato della funzione da minimizzare

Oss. che studiare $f|_Z$ equivale a studiare

$$\varphi(x) = f\left(x, \frac{16}{x^2}\right) = x^2 + \frac{256}{x^4}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

($x > 0$ per simmetria)



. . . $\varphi'(x) = \dots = 0$

Procedo con TML : $L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 y - 16)$$

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) = 2x - \lambda\, 2xy = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) = 2y - \lambda x^2 = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) = -(x^2 y - 16) = 0 \end{cases}$$

Ho dimenticato :

$\nabla g(x,y) = (2xy, x^2)$

$\to (0,\beta), \ \beta \in \mathbb{R}$

$g(0,\beta) = -16 \neq 0$

$\Rightarrow (0,\beta) \notin Z$

Non ci sono punti singolari

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda y) = 0 \\ 2y - \lambda x^2 = 0 \\ x^2 y - 16 = 0 \end{cases}$$

$\iff x = 0$ (1) opp. $1 - \lambda y = 0$ (2)

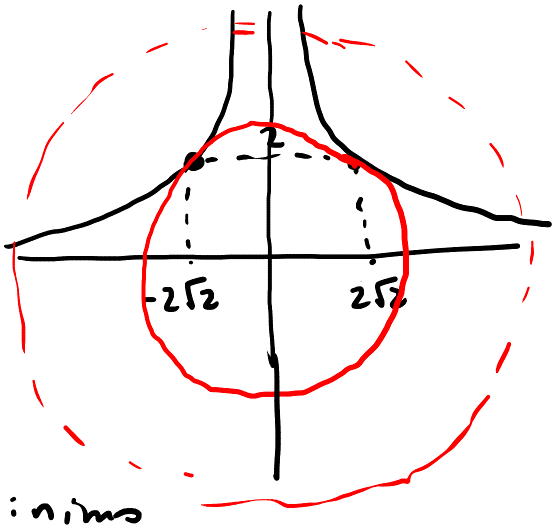
(1) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -16 = 0 \end{cases}$ impossibile!

② $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{y} & (y \neq 0) \\ 2y - \frac{x^2}{y} = 0 \\ x^2 y = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} \dots \\ x^2 = 2y^2 \\ 2y^3 = 16 \end{cases}$ $\begin{array}{l} \dots \\ x^2 = 8 \\ y = 2 \end{array}$

Punti candidati di estremo:

$$(\pm 2\sqrt{2}, 2)$$

$f(\pm 2\sqrt{2}, 2) = 8 + 4 = 12$



Per considerazioni geometriche:

$(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ punto di minimo

Conclusione: la minima distanza di $(0,0)$ da $\{(x,y) \mid x^2y - 16 = 0\}$ è $\sqrt{12}$. $\square$

Esempio

Estremi globali di $f(x,y,z) = xyz$ in $Z := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1=0,\ x\geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Parametrizzo Z:

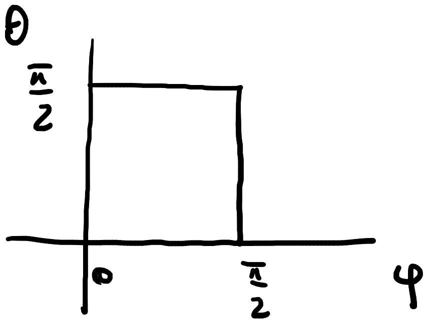
$$\sigma(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

$$(\varphi, \theta) \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] =: K$$

Studiamo

$$\tilde f(\varphi,\theta) := f(\sigma(\varphi,\theta)) = \sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin\theta$$

$(\varphi,\theta)\in K$



esistono perché Z é chiuso e limitato

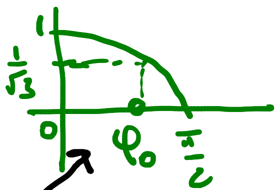
$$\text{Oss: } \left.\begin{array}{l}\tilde f|_{\partial K} \equiv 0 \\ \tilde f|_{\mathring K} > 0\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\min_Z f = \min_{\partial K}\tilde f = 0 \\ \max_Z f = \max_{\mathring K}\tilde f\end{array}$$

Cerco i punti stazionari di $\tilde f$ in $\underline{\mathring K}$:

$$\begin{cases}\tilde f_\varphi(\varphi,\theta) = \underbrace{\cos\theta}_{>0}\,\underbrace{\sin\theta}_{>0}\,(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) = 0 \\ \tilde f_\theta(\varphi,\theta) = \underbrace{\sin^2\varphi}_{>0}\,\underbrace{\cos\varphi}_{>0}\,(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overset{>0}{\sin\varphi}\,(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \\ \sin^2\theta = \cos^2\theta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\cos^2\varphi - 1 = 0 & (1) \\ \sin^2\theta = \cos^2\theta & (2)\end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{3} \overset{\cos\varphi>0}{\Leftrightarrow} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt3}$$



$$\to \varphi = \varphi_0$$

$$(2) \overset{\cos\theta>0,\ \sin\theta>0}{\Leftrightarrow} \sin\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Quindi: $\tilde f$ ha in $\mathring K$ l'unico punto stazionario $(\varphi_0, \frac{\pi}{4})$ che è necessariamente punto

(Weierstrass + Fermat)

d: massimo globale

Conclusione:

$$\max_{Z} f = \max_{\mathring{K}} \tilde{f} = \tilde{f}\left(\varphi_0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin^2\varphi_0 \cos\varphi_0 \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Dove è assunto il massimo di f?

In $\sigma\left(\varphi_0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin\varphi_0 \cos\frac{\pi}{4}, \sin\varphi_0 \sin\frac{\pi}{4}, \cos\varphi_0\right)$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Verifico la nota su "$\nabla g(P_0)$ ortogonale al piano tangente" nel caso esplicitato

Parametrizzo $Z \cap W$ con

$$\sigma(x,y) = (x, y, h(x,y)) \qquad (x,y) \in U$$

U ← intorno di (x_0, y_0)

Ricordo che

$$N_\sigma(x_0,y_0) = (-h_x(x_0,y_0), -h_y(x_0,y_0), 1)$$

$$= \left(\frac{g_x(x_0, y_0, \overbrace{h(x_0,y_0)}^{=z_0})}{g_z(x_0,y_0,h(x_0,y_0))}, \frac{g_y(x_0,y_0,h(x_0,y_0))}{g_z(x_0,y_0,h(x_0,y_0))}, 1\right)$$

$$= \left(\frac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)}, \frac{g_y(P_0)}{g_z(P_0)}, 1 \right)$$

$$= \frac{1}{g_z(P_0)} \left(g_x(P_0), g_y(P_0), g_z(P_0) \right)$$

$$= \frac{1}{g_z(P_0)} \nabla g(P_0)$$

$\Rightarrow N_\sigma(x_0, y_0) \;//\; \nabla g(P_0)$

ortogonale al piano tangente $\Rightarrow$ ortog. al piano tangente

Dimostro il TML

Pongo $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$

$\nabla g(P_0) \neq (0,0,0) \overset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}$ esiste W intorno di P_0 t.c. $Z \cap W$ è sostegno di una superficie regolare con parametrizzazione σ definita in un insieme di parametri K.

Osservo che esiste un unico $(u_0, v_0) \in K$ t.c. $\sigma(u_0, v_0) = P_0$

Definisco $\tilde{f}(u,v) = f(\sigma(u,v))$

Osservo che:

- (u_0, v_0) è interno a K (costruzione nel teor di Dini)

- (u_0, v_0) è punto di estremo per $\tilde{f}$
- $\tilde{f}$ di classe C^1

Per il teor. di Fermat (dell' Analisi 2!):

$$\nabla\tilde{f}(u_0,v_0) = (0,0)$$

Calcolo esplicitamente $\nabla\tilde{f}(u_0,v_0)$:

$$\left(\underbrace{\tilde{f}_u(u_0,v_0)}\quad \underbrace{\tilde{f}_v(u_0,v_0)}\right) = \nabla\tilde{f}(u_0,v_0)$$

$$= J_{\underbrace{\tilde{f}}_{= f\circ\sigma}}(u_0,v_0) = J_f(\sigma(u_0,v_0))\, J_\sigma(u_0,v_0)$$

$$\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$= \begin{pmatrix} f_x(\sigma(u_0,v_0)) & f_y(\sigma(u_0,v_0)) & f_z(\sigma(u_0,v_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

$$= \Bigg(\underbrace{f_x(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u_0,v_0) + f_y(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u_0,v_0) + f_z(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u_0,v_0)}_{= \frac{\partial}{\partial u}(f\circ\sigma)(u_0,v_0)}$$

$$\underbrace{f_x(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u_0,v_0) + f_y(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u_0,v_0) + f_z(\sigma(u_0,v_0))\frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u_0,v_0)}_{\frac{\partial}{\partial v}(f\circ\sigma)(u_0,v_0)} \Bigg)$$

Quindi: $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u}(u_0,v_0) = \nabla f(P_0)\cdot\sigma_u(u_0,v_0)$.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0,v_0) = \nabla f(P_0)\cdot \sigma_v(u_0,v_0) \quad \bullet\bullet$$

Perciò: dire che $\nabla\tilde{f}(u_0,v_0) = (0,0)$

equivale a dire che

- $\bullet$ $\nabla f(P_0) \perp \sigma_u(u_0,v_0)$
- $\bullet\bullet$ $\nabla f(P_0) \perp \sigma_v(u_0,v_0)$

$\Rightarrow$ $\nabla f(P_0)$ è ortogonale al piano generato da $\sigma_u(u_0,v_0)$ e $\sigma_v(u_0,v_0)$, cioè il piano tangente a Z.

Come osservato, $\nabla g(P_0)$ è ortogonale allo stesso piano, perciò: $\nabla f(P_0)$ e $\nabla g(P_0)$ sono paralleli, cioè: $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0)$

. . . . $\square$

Esempi

- Estremi di $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ in

$$Z := \{(x,y,z) \mid \underbrace{z^2 - xy - 1}_{=:\, g(x,y,z)} = 0\}$$

Punti singolari?

$$\nabla g(x,y,z) = (-y, -x, 2z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0) \notin Z$$

$\Rightarrow$ non ce ne sono.

Lagrangiana: $L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tc

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(z^2 - xy - 1)$$

Punti stazionari di L:

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda) = 2x - \lambda(-y) = 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda) = 2y - \lambda(-x) = 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda) = 2z - \lambda(2z) = 0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) = -(z^2 - xy - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ 2z(1-\lambda) = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \overset{①}{z = 0} \quad \text{opp.} \quad \overset{②}{\lambda = 1}$$

① $\begin{cases} z = 0 \\ 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$ $\quad 2(x-y) + \lambda(y-x) = 0$

$(2-\lambda)(x-y) = 0$ $\quad \begin{cases} x = y & \odot \\ \lambda = 2 & (\cdot\cdot) \end{cases}$

$\odot$ $\begin{cases} z = 0 \\ \dots \\ x^2 = -1 \end{cases}$ impossibile!

$(\cdot\cdot)$ $\begin{cases} z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{cases}$ $\quad -x = +y$

$xy = -1 \longrightarrow -x^2 = -1 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

$\Rightarrow (\pm 1, \mp 1, 0)$

② $\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2x+y=0 \\ x+2y=0 \\ z^2-xy-1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=y=0 \quad z^2-1=0$

$\Rightarrow (0, 0, \pm 1)$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad Z = \{ z^2-xy-1=0 \}$

$z^2 = xy+1$

$f(\pm 1, \mp 1, 0) = 2$

$f(0, 0, \pm 1) = 1$

Oss: $\left.\begin{array}{l} (n, n, \sqrt{n^2+1}) \in Z \quad \forall n \\ \| (n, n, \sqrt{n^2+1}) \| = \dots \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

Z non è limitato

$\Rightarrow$ Weierstrass <u>non</u> si applica!

$f(n, n, \sqrt{n^2+1}) = n^2+n^2+n^2+1 \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow \sup_Z f = +\infty \Rightarrow$ il $\max_Z f$ non esiste!

Oss: $(x,y,z) \in Z \iff z^2 = xy+1$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = \underbrace{x^2+y^2+xy}_{\text{"falso quadrato"} \ (\geq 0)} + 1 \geq 1$

$$\Rightarrow \quad \min_{Z} f = 1 = f(0,0,\pm 1)$$

$\square$

- $f(x,y,z) = \underline{xyz}$ (volume)

$$Z = \{ \underbrace{xy + 2xz + 2yz - 12}_{=: g(x,y,z)} = 0 \} \quad \overbrace{}^{}\ x>0,\ y>0,\ z>0$$

$(2,2,1)$ FATELO VOI!