10 maggio 2024

- $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f_x(x,y,z) = 2x - y - z, \qquad f_y(x,y,z) = 3y^2 - x,$

$f_z(x,y,z) = 2z - x$

Già trovati i punti stazionari:

$(0,0,0) \qquad \left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right) =: P$

↑
già classificato
(punto di sella)

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

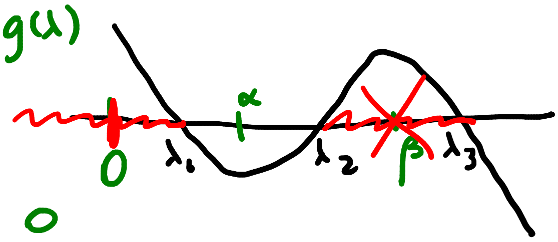
Cerco gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3}-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{4}{3}-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & \frac{4}{3}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{3} + \lambda + (2-\lambda)\left(\frac{8}{3} - 2\lambda - \frac{4}{3}\lambda + \lambda^2 - 1\right)$$

$$= -\frac{4}{3} + \lambda + \frac{16}{3} - 4\lambda - \frac{8}{3}\lambda + 2\lambda^2 - 2 - \frac{8}{3}\lambda + 2\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + \frac{16}{3}\lambda^2 - \frac{22}{3}\lambda + 2 =: g(\lambda)$$



$g(0) = 2 > 0$

$g'(\lambda) = -3\lambda^2 + \frac{32}{3}\lambda - \frac{22}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = \alpha, \quad \lambda = \beta \quad , \quad \alpha, \beta > 0$

$\Rightarrow \quad 0 < \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$

$\Rightarrow \quad P$ punto di minimo locale

non globale

Oss: $\quad f(0,y,0) = y^3 \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \pm\infty$

$\Rightarrow \quad \inf_{\mathbb{R}^3} f = -\infty, \qquad \sup_{\mathbb{R}^3} f = +\infty$

- $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2 \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$f_x(x,y,z) = 2xy, \quad f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz,$

$f_z(x,y,z) = y^2 + 2z$

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 2yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \qquad ① \begin{cases} x = 0 \\ yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \\ x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad (0,0,0)$$

$$② \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \qquad (0,0,0)$$

Unico punto stazionario: $(0,0,0)$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

- $\lambda = 0$ con autovettore $(1,0,0)$
- $\lambda = 0$ " " $(0,1,0)$
- $\lambda = 2$ " " $(0,0,1)$

minimo locale ?

Valuto la restrizione di f alla retta passante per $(0,0,0)$ individuata da $v = (1,0,0)$:

$$f((0,0,0) + t(1,0,0)) = f(t,0,0) = -2$$

??

(conferma la congettura)

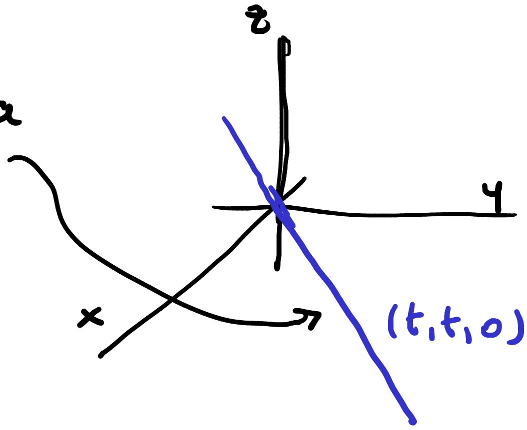
Valuto la restrizione di f alla retta passante per $(0,0,0)$ individuata da $v = (0,1,0)$:

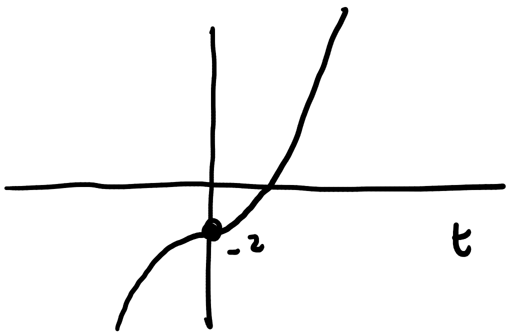
$$f((0,0,0) + t(0,1,0)) = f(0,t,0) = -2$$

??

Valuto la restrizione di f a

$$f(t,t,0) = t^3 - 2$$





Per questa restrizione $t=0$ è punto di flesso a tangente orizzontale, quindi non è punto di minimo locale

$\Rightarrow$ $(0,0,0)$ non è punto di minimo locale per f

$\Rightarrow$ $(0,0,0)$ punto di sella.

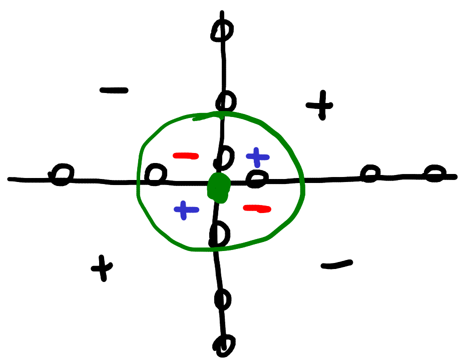
Esempi (classificazione di punti stazionari in presenza di autov. nullo della matrice hessiana)

- $f(x,y) = x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$= xy\,\underbrace{(x^2 + xy + y^2)}$$

$$= x^2 + 2x\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2$$

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$



$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad f_x(x,y) = 3x^2 y + 2xy^2 + y^3$

$\qquad f_y(x,y) = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2$

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} y(3x^2 + 2xy + y^2) = 0 \\ x(x^2 + 2xy + 3y^2) = 0 \end{cases}$$

① $\begin{cases} y = 0 \\ x \cdot x^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow (0,0)$

② $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x\,(x^2 + 2xy + 3y^2) = 0 \end{cases}$

2' $\begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow (0,0)$

2'' $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y \\ x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \longrightarrow (0,0)$

$\begin{cases} x = -y \\ x^2 - 2x^2 + 3x^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$

Quindi: $(0,0)$ unico punto stazionario

Osservo che $f(0,0) = 0$; dallo studio del segno di f deduco che $(0,0)$ è un punto di sella.

- $f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2$ $\quad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$f_x(x,y) = 96x^3 - 2(x-y)$, $\quad f_y(x,y) = 12y^3 + 2(x-y)$

Cerco i punti stazionari:

$\begin{cases} 48x^3 - (x-y) = 0 \\ 6y^3 + (x-y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 48x^3 + 6y^3 = 0 \\ 6y^3 + (x-y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^3 + y^3 = 0 \\ 6y^3 + x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ -48x^3 + 3x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ x\,(1 - 16x^2) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{4} \\ y = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$$

Punti stazionari: $(0,0)$ $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Calcolo:

$f_{xx}(x,y) = 288x^2 - 2$, $\quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$

$f_{yy}(x,y) = 36y^2 - 2$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 - 4 = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+4)$$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = -4 \leftarrow$ massimo locale?

Determino un autovettore corrispondente a $\lambda = 0$:

[Cerco $v \neq 0$ tc. $H_f(0,0)v = 0v$

In generale: $H_f(\bar{x})v = \lambda v = \lambda I v \iff$

$(H_f(\bar{x}) - \lambda I)v = 0$]

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = v_2 \qquad$ Scelgo $v = (1,1)$

Considero la restrizione di f alla retta passante per $(0,0)$ individuata da $v = (1,1)$:

$$f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = 24t^4 + 3t^4 = 27t^4$$

Per questa restrizione: $t=0$ punto di minimo
(congettura: massimo)

Conclusione: $(0,0)$ punto di sella.

$$H_f\left(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 288\cdot\frac{1}{16} - 2 & 2 \\ 2 & 36\cdot\frac{1}{4} - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \underbrace{-}_{\text{var.}} 23\lambda \underbrace{+}_{\text{var.}} 108$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow \left(\pm\frac{1}{4}, \mp\frac{1}{2}\right)$ punti di minimo locale

? anche globale?

$$f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2$$

Oss: $f(x,x) = 27x^4 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

Oss: ricordo che $x^4+y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2+y^2 - 2xy$$

$$\leq x^2+y^2 + |2xy| \leq x^2+y^2 + x^2+y^2$$

$$= 2(x^2+y^2) \underset{x^2+y^2\geq 2}{\leq} (x^2+y^2)^2 \leq 2(x^4+y^4)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = 24x^4 + 3y^4 - (x-y)^2$$

$$\geq 24x^4 + 3y^4 - 2(x^4+y^4)$$

$$= 22x^4 + y^4 \geq x^4 + y^4 \geq \underbrace{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}_{\downarrow \atop +\infty}$$

valida per $x^2+y^2 \geq 2$

$\|(x,y)\| \to +\infty$:

$f(x,y) \to +\infty$

Quindi: i punti trovati sono di minimo globale

- $f(x,y) = x^4 + x^2y + y^2 + 3$ $\qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$f_x(x,y) = 4x^3 + 2xy$ $\qquad f_y(x,y) = x^2 + 2y$

Punti stazionari :

$$\begin{cases} 2x(2x^2+y) = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

$\nearrow$ $x = 0, \; y = 0$

$\searrow$ $\begin{cases} 2x^2+y = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

$(0,0)$ unico punto stazionario

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

minimo locale ?

Autovettore corrisp. a $\lambda = 0$: $(1,0)$

Restringo f :

$f((0,0)+t(1,0)) = f(t,0) = t^4 + 3$

$t=0$ punto di min. loc. ??

Provo a confermare la congettura studiando

$$f(x,y) \geq f(0,0)$$

cioè

$$x^4 + x^2 y + y^2 + 3 \geq 3$$

$$\underbrace{x^4 + x^2 y + y^2}_{\geq 0 \ \forall (x,y) \ (\text{"falso quadrato"})} \geq 0$$

Conclusione: $(0,0)$ punto di minimo globale.

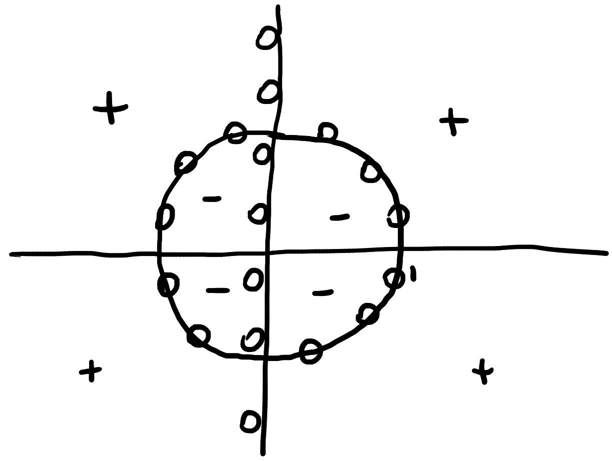
(max globale non esiste, $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

$\uparrow$

$f(x,0) = x^4 + 3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$)

- $f(x,y) = x^4 + x^2(y^2 - 1) \qquad f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$= x^2(x^2 + y^2 - 1)$$



$\forall (x,y)$:

$f_x(x,y) = 4x^3 + 2x(y^2 - 1)$

$f_y(x,y) = 2x^2 y$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 2x(2x^2+y^2-1) = 0 \\ 2x^2 y = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$x = 0$

1ª equazione identicamente soddisfatta

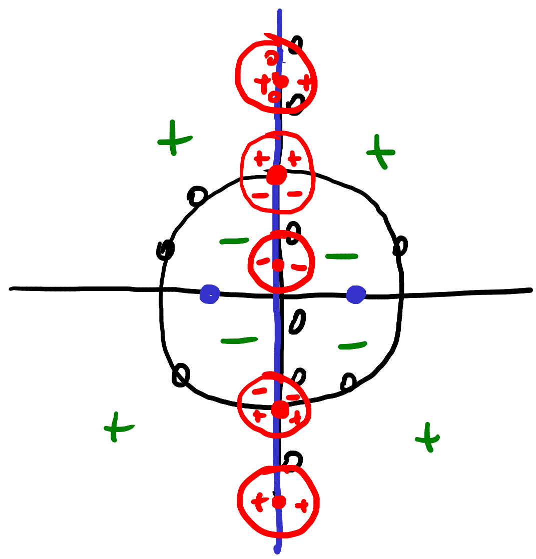
$\rightarrow$ $\begin{cases} y = 0 \\ x(2x^2-1) = 0 \end{cases}$

$x = 0$ già considerato

$2x^2 - 1 = 0$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Punti stazionari: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\quad (0, \beta)$ $\quad \beta \in \mathbb{R}$



Dal segno:

- $(0,1)$, $(0,-1)$ punti di sella

- $\beta > 1$ oppure $\beta < -1$:

  $(0,\beta)$ punto di min. loc.

- $-1 < \beta < 1$: $(0,\beta)$ punto di max loc.

Per curiosità:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2(y^2-1) & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0,\beta) = \begin{pmatrix} 2(\beta^2-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

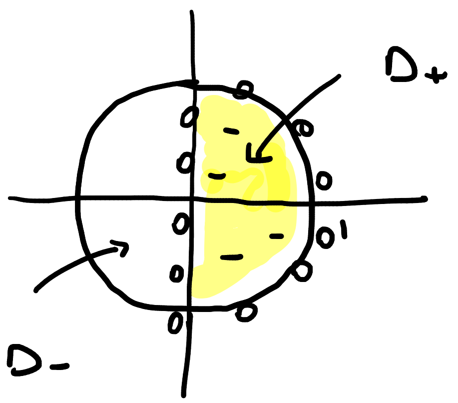
??

In $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

$$H_f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad > 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sono punti di minimo locale

Ragionamento alternativo:



$D_+ = \{(x,y) \mid x^2+y^2-1 \leq 0, \; x \geq 0\}$

Oss: D_+ chiuso e limitato

$f_{|D_+}$ continua

$\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow}$ f ha massimo e minimo globali in D_+

Osservo che $\max_{D_+} f = 0$, assunto in tutti i punti di ∂D_+

Quindi: il minimo di f in D è assunto in uno o più punti interni a D

Cioè: $\exists\, (x_0, y_0) \in \text{int}(D)$ t.c. $f(x_0,y_0) = \min_D f$

$\overset{\text{Fermat}}{\Rightarrow}$ (x_0, y_0) è punto stazionario

Siccome in $\text{int}(D)$ l'unico punto stazionario è $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, deduco che $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ è proprio il punto di minimo globale per $f|_D$, quindi è punto di minimo locale per f (in $\mathbb{R}^2$)

Per simmetria, lo stesso vale per $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Osservo che

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} = \min_{D_+ \cup D_-} f = \min_{\mathbb{R}^2} f$$

$$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus D} \geq 0$$

Per concludere:

$$f(x,1) = x^4 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty = \sup_{\mathbb{R}^2} f$$

Esempi finali

- $f(x,y) = (x+y)^3 |x|$

  $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; potrebbe non essere differenziabile nei punti $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

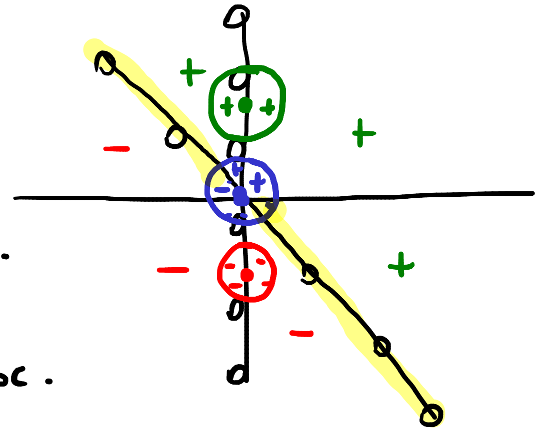
  Posto $A := \{(x,y) \mid x \neq 0\}$, f è di classe C^2 in A ← aperto

  Consideriamo candidati punti di estremo tutti i punti del tipo $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

(senza verificare se f è differenziabile oppure no)

Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$: $\quad f(0,\beta) = 0$

Studio il segno di f:



$(0,\beta)$ è
- punto di min. loc. se $\beta > 0$
- punto di max loc. se $\beta < 0$
- punto né di max né di min se $\beta = 0$ (non uso "sella" perché non ho verificato se $(0,0)$ è punto stazionario)

Ora cerco i punti stazionari in A.

Per $(x,y) \in A$:

$$f_x(x,y) = 3(x+y)^2 |x| + (x+y)^3 \operatorname{sign}(x)$$

$$f_y(x,y) = |x| \cdot 3(x+y)^2$$

Risolvo:

$$\begin{cases} (x+y)^2 \left(3|x| + (x+y)\operatorname{sign}(x)\right) = 0 \\ \underbrace{|x|}_{\neq 0} (x+y)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad x+y=0 \end{cases}$$

ottengo una identità

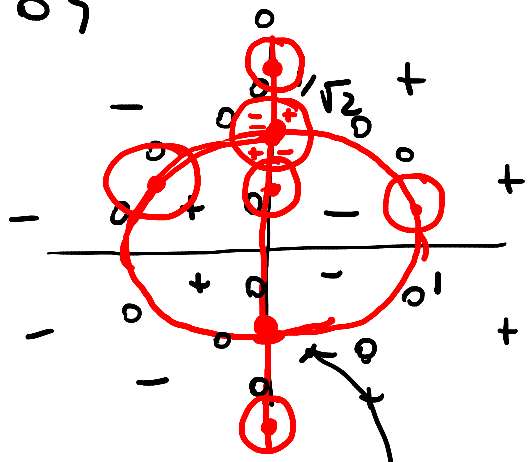
Dunque: $\forall x \neq 0$: $(x,-x)$ è punto stazionario

Dal segno: punto di sella.

OSS: $f(x,x) = 8x^3|x| \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \implies \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$ $\square$

- $f(x,y) = (x^3 + 2xy^2 - x)^{1/3}$

  - f definita in $\mathbb{R}^2$, continua
  - f di classe C^2 in $\{(x,y) \mid x^3 + 2xy^2 - x \neq 0\} =: A$
    $\uparrow$ aperto
  - possibile non differenziabilità in
    $\{(x,y) \mid \underbrace{x^3 + 2xy^2 - x}_{x(x^2+2y^2-1)} = 0\}$



Dal segno:

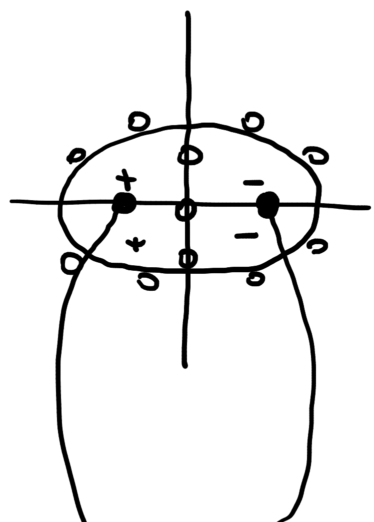
$(0,\beta)$ né di massimo loc
né di minimo loc.
per qualsiasi β

Stessa conclusione per i punti sull'ellisse.

Cerco i punti stazionari in A:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{x^3 + 2xy^2 - x}_{\neq 0}\right)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 2xy^2 - x\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4xy$$



Risolvo:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ 4\underbrace{x}_{\neq 0}y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Come in un esempio precedente, utilizzando i teoremi di Weierstrass e Fermat,

deduco che $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è punto di minimo locale

e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ è punto di massimo locale.

OSS: $f(x,0) = (x^3 - x)^{1/3} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x \to \pm\infty$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = +\infty. \qquad \square$$