9 maggio 2024

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{int}(A)$

f differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y})$

Ricordo l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(\bar{x}, \bar{y})$: $\leftarrow$ $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (x - \bar{x}, y - \bar{y})$$

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

$$\underbrace{-\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})}_{a} x \underbrace{- \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})}_{b} y + \underbrace{1}_{c} \cdot z + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})\bar{x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})\bar{y} - f(\bar{x}, \bar{y})}_{d} = 0$$

Vettore di giacitura:

$$(a, b, c) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}), 1 \right)$$

Esempi (punti stazionari)

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

f polinomiale $\Rightarrow$ f differenziabile

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \qquad f_y(x, y) = -3x + 2y$$

Cerco i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ -3x + 2x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x(2x-3) = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \implies y = 0 \qquad (0,0)$

$2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \implies y = \frac{9}{4} \qquad \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

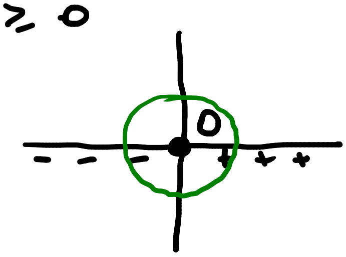
Quindi: $(0,0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ sono gli unici candidati punti di estremo locale. Lo sono?

Oss: $f(0,0) = 0$

Domanda: è vero che $f(x,y) \geq 0$ oppure $f(x,y) \leq 0$ in tutto un intorno di $(0,0)$?

$$f(x,y) \overset{?}{\geq} 0 \iff x^3 - 3xy + y^2 \geq 0$$

Oss: $f(x,0) = x^3$



$\implies (0,0)$ punto di sella.

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = \underbrace{\frac{27}{8} - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{81}{16}}$$

$$x^3 - 3xy + y^2 \geq \downarrow \quad ???$$

lascio in sospeso

- $f(x,y,z) = x^3 y - y + x^2 z^2 \qquad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^3$

polinomiale $\implies$ differenziabile

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$f_x(x,y,z) = 3x^2y + 2xz^2$, $f_y(x,y,z) = x^3 - 1$

$f_z(x,y,z) = 2x^2z$

Risolvo

$$\begin{cases} 3x^2y + 2xz^2 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \\ 2x^2 z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi: $(1,0,0)$ unico punto stazionario.

Come stabilisco se è punto di max / min / sella ?

Verifico che $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Hx \cdot x \leq \lambda_M \|x\|^2$$

Fisso $x \in \mathbb{R}^n$; $\exists! (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ t.c. $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$

Osservo che

- $\|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^n c_i v_i \cdot \sum_{j=1}^n c_j v_j$ $\quad 0 \;\; i \neq j \quad 1 \;\; i = j$

$$= \sum_{i=1}^n c_i \left(v_i \cdot \sum_{j=1}^n c_j v_j \right) = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j \overbrace{v_i \cdot v_j}^{=}}_{= c_i}$$

$$= \sum_{i=1}^n c_i^2$$

- $Hx \cdot x = \left(H \sum_{i=1}^n c_i v_i \right) \cdot \sum_{j=1}^n c_j v_j$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{Hv_i}_{\lambda_i v_i}\Big) \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j v_j = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j v_j}_{c_i}$$

$$= \dots = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i$$

Concludo: per ogni i:

$$\lambda_m \le \lambda_i \le \lambda_M$$

$c_i^2 \ge 0$ $\Rightarrow$

$$\lambda_m c_i^2 \le \lambda_i c_i^2 \le \lambda_M c_i^2$$

Sommando:

$$\sum_i \lambda_m c_i^2 \le \sum_i \lambda_i c_i^2 \le \sum_i \lambda_M c_i^2$$

$$\lambda_m \|x\|^2 \le Hx \cdot x \le \lambda_M \|x\|^2 \qquad \square$$

Esempi (che mostrano che per $\lambda = 0$ non si può prevedere nulla)

- $f(x,y) = x^2 + y^4 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$(0,0)$ unico punto stazionario

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

autovalori 2 e 0

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Restringo f alla retta passante per $(0,0)$ individuata da $v=(0,1)$

$$f((0,0)+t(0,1)) = f(0,t) = t^4$$ ha in $t=0$ punto di MINIMO

- $f(x,y) = x^2 + y^3$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 = 0 \end{cases}$$ $(0,0)$ unico punto stat.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ la stessa di prima!

$$f((0,0)+t(0,1)) = f(0,t) = t^3$$ $t=0$ è punto di SELLA

Esempi (classificazione di punti stazionari)

- $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$

Già visto: $\underbrace{(0,0)}_{\text{già classificato}}$, $\underbrace{\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}_{??}$ punti stat.

$\forall (x,y)$:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad f_y(x,y) = -3x + 2y$$

$$\Rightarrow f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3$$

$$f_{yy}(x,y) = 2$$

$$\Rightarrow H_f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

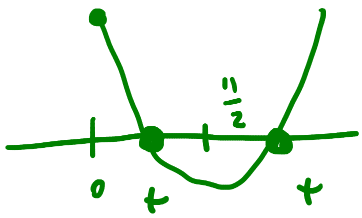
Autovalori sono radici del polinomio

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(2-\lambda)-9 = \lambda^2 \underbrace{-\ 11\lambda}_{\text{var.}} \underbrace{+\ 9}_{\text{var.}} =: g(\lambda)$$

$+ \quad +$

$g'(\lambda) = 2\lambda - 11$

$g(0) = 9$



$H_f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ ha autoval. >0 $\Rightarrow$

$\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ punto di minimo locale.

(Globale? No! $\quad f(x,0) = x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$)

- $f(x,y,z) = x^3y - y + x^2z^2$

Già visto:

$f_x(x,y,z) = 3x^2y + 2xz^2$ $\qquad$ punto stazionario

$f_y(x,y,z) = x^3 - 1$ $\qquad$ $(1,0,0)$

$f_z(x,y,z) = 2x^2z$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6xy+2z^2 & 3x^2 & 4xz \\ 3x^2 & 0 & 0 \\ 4xz & 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H_f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cerco gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 9)$$

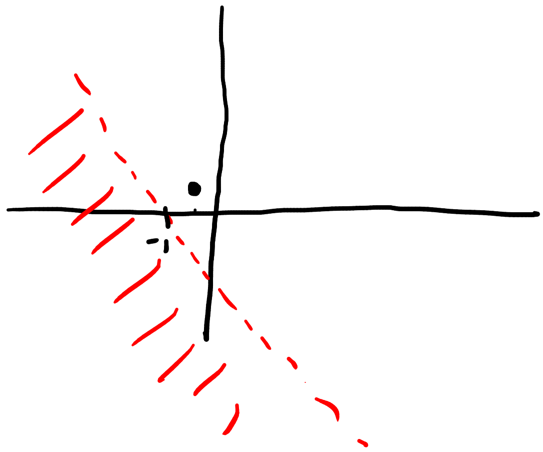
$$\Rightarrow \quad \lambda = 2, \quad \lambda = 3, \quad \lambda = -3$$

$\Rightarrow H_f(1,0,0)$ è indefinita $\overset{\text{Teor.}}{\Rightarrow}$ $(1,0,0)$ è punto di sella

- $f(x,y) = \ln(1+x+y) - x - y^2$

$\text{dom}(f) = \{(x,y) \mid 1+x+y>0\}$

$\uparrow$
aperto



f è di classe C^2

$\forall (x,y) \in \text{dom}(f)$:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - 1, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{1+x+y} - 2y$$

Cerco i punti stazionari:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x+y} - 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{1+x+y} - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1+x+y = 1 \\[2ex] 2y = 1 \end{matrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} x = -\frac{1}{2} \\[2ex] y = \frac{1}{2} \end{matrix}}$$

Unico punto stazionario: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Calcolo le der. seconde:

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2} - 2$$

$$\Rightarrow H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Autovalori ?

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) - 1$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 2 \qquad \text{radici} < 0$$

$\Rightarrow H_f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ definita negativa

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punto di massimo locale.

[Anche globale ?]

- $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$

$f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\forall (x,y,z)$:
$$f_x(x,y,z) = 2x - y - z$$
$$f_y(x,y,z) = 3y^2 - x$$
$$f_z(x,y,z) = 2z - x$$

Cerco punti stazionari:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6y^2 - y - \frac{3}{2}y^2 = 0 \\ x = 3y^2 \\ z = \frac{3}{2}y^2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\frac{9}{2}y^2 - y = 0 \\ &y\left(\frac{9}{2}y - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{2}{9} \\ x &= \frac{4}{27} \\ z &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (0,0,0) \qquad \left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right)$$

Calcolo

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6y & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalori:

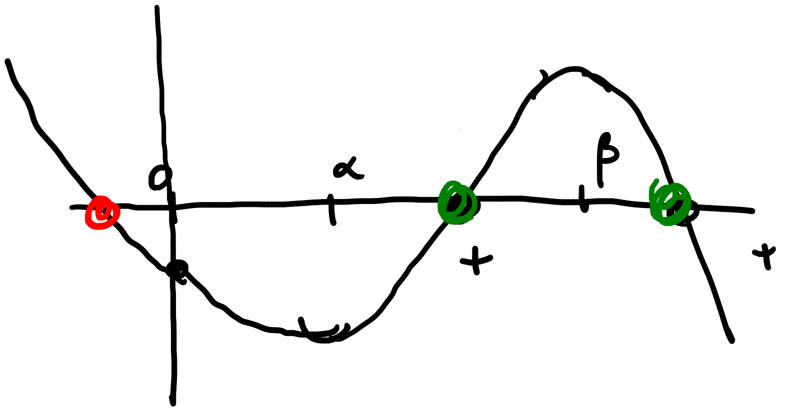
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda + (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 - 1)$$

$$= \lambda - 4\lambda + 2\lambda^2 - 2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 2 =: g(\lambda)$$

$g'(\lambda) = -3\lambda^2 + 8\lambda - 2 \leftarrow \alpha, \beta > 0$ $\qquad g(0) = -2$



Conclusione: $(0,0,0)$ punto di sella.

DA COMPLETARE ...