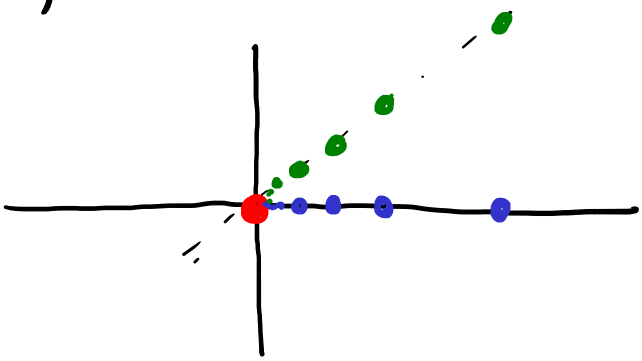
4 aprile 2024

Commento sull'esempio della lez. precedente

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \qquad k \in \mathbb{N}^*$
- $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{k}, 0\right) \to f(0,0)$



$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \dots = \frac{1}{2} \not\to f(0,0)$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad , \quad g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$f(A) \subseteq B \quad$ ($\Rightarrow$ posso definire $g \circ f$)

Ip: $\quad f$ continua in $\bar{x} \in A$

$\quad\quad g$ continua in $f(\bar{x})$ $(\in B)$

Tesi: $\quad g \circ f$ continua in $\bar{x}$

Verifica:

$(x_n) \subset A$ t.c. $x_n \to \bar{x}$

f continua in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x_n)}_{\text{succ. di elementi di } B \text{ che converge a } f(\bar{x})} \to f(\bar{x})$

g continua in $f(\bar{x})$ $\Rightarrow$ $g(f(x_n)) \to g(f(\bar{x}))$

$\Leftrightarrow$ $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(\bar{x})$

$\square$

Es:

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$

$= \pi_1(x_1, x_2, x_3) + \pi_2(x_1, x_2, x_3)$

$\Rightarrow$ $f_1 = \underbrace{\pi_1}_{} + \underbrace{\pi_2}_{}$

continue (già visto)

somma
$\Rightarrow$ f_1 è continua in $\mathbb{R}^3$.

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3^2$

$= \pi_1(x_1, x_2, x_3)\, \pi_3(x_1, x_2, x_3)\, \pi_3(x_1, x_2, x_3)$

$\Rightarrow$ $f_2 = \underbrace{\pi_1}_{} \cdot \underbrace{\pi_3}_{} \cdot \underbrace{\pi_3}_{}$ continua in $\mathbb{R}^3$.

continue

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ t.c. $r(t) = x + t(y-x)$

Componenti:

$r_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $r_1(t) = x_1 + t(y_1 - x_1)$

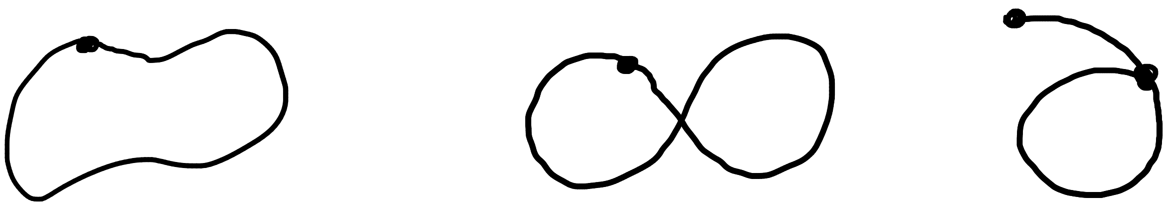
$r_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $r_2(t) = x_2 + t(y_2 - x_2)$

$\vdots$

$r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $r_n(t) = x_n + t(y_n - x_n)$

$r_1, \dots, r_n$ funzioni polinomiali di grado minore o uguale a 1 $\Rightarrow$ sono continue

$\Rightarrow$ r è continua



chiusa, semplice — chiusa non semplice — non chiusa non semplice

- $r(t) = x + t(y-x)$ $t \in \mathbb{R}$ $(x, y \in \mathbb{R}^n, \ x \neq y)$

non chiusa, piana (OVVIAMENTE !!!)

Semplice? Sì, perché iniettiva

Oss: condizione sufficiente (non necessaria!) affinché una funzione vettoriale sia ingettiva è che almeno una delle sue componenti sia ingettiva.

$x \neq y \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$ tc. $x_k \neq y_k$

$\Rightarrow \quad r_k(t) = x_k + t\underbrace{(x_k - y_k)}_{\neq 0} \Rightarrow$ ingettiva

- $r(t) = x + t(y - x) \quad t \in [0, +\infty)$

  non chiusa, semplice

- $r(t) = x + t(y - x) \quad t \in [0, 1]$

  $\left.\begin{array}{l} r(0) = x \\ r(1) = y \end{array}\right. \quad x \neq y \quad \Rightarrow$ non chiusa

  semplice

- $r(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$

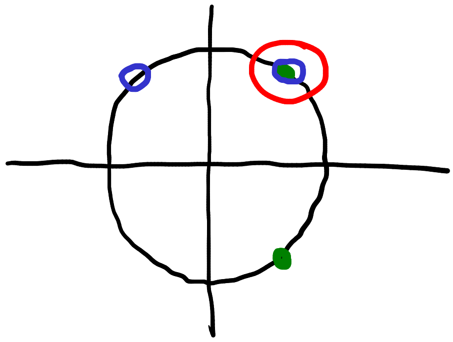
  piana

  $\left.\begin{array}{l} r(0) = (1,0) \\ r(2\pi) = (1,0) \end{array}\right| \Rightarrow$ chiusa

  semplice? sì!

  $r(t_1) = r(t_2) \iff \begin{cases} \cos(t_1) = \cos(t_2) \\ \sin(t_1) = \sin(t_2) \end{cases}$

  $t_1, t_2 \in]0, 2\pi[$



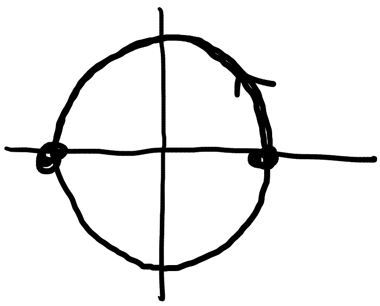
- $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 3\pi]$

  piana ✓

  $r(0) = (1,0)$
  $r(3\pi) = (-1,0)$ $\neq$ $\Rightarrow$ non chiusa

  semplice? no!

  per esempio: $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) = r\left(\frac{5}{2}\pi\right)$



- $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$

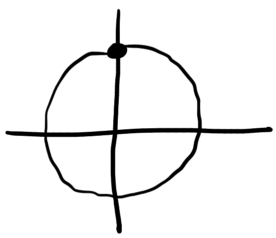
  non chiusa, non semplice, piana

- $r(t) = (\sin(t), \cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

  piana ✓

  $r(0) = (0,1) = r(2\pi)$ $\Rightarrow$ chiusa

  semplice

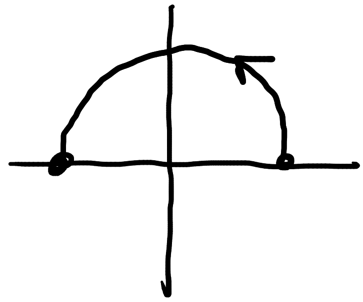


- $r(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$

piana ✓

semplice (restrizione di semplice)

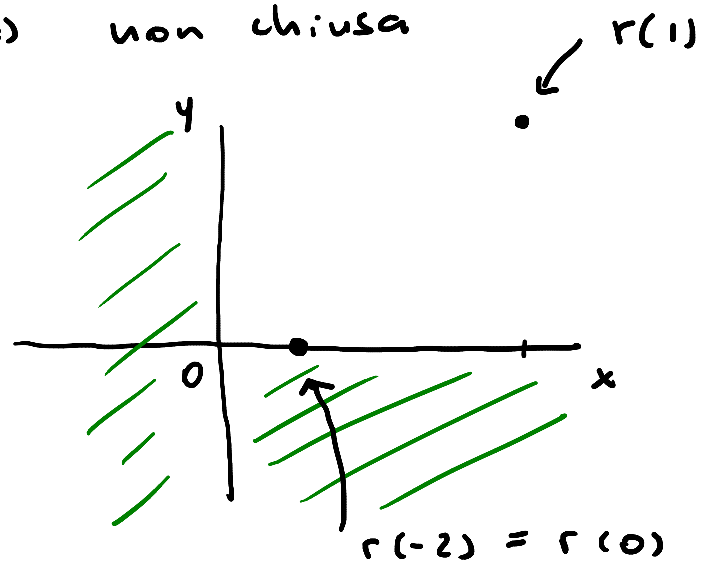
$r(0) = (1, 0)$
$r(\pi) = (-1, 0)$ $\neq$ $\Rightarrow$ non chiusa



Es. $r(t) = \big(\underbrace{\overbrace{(t+1)^2}^{\geq 0}}_{\text{continua}}, \underbrace{\overbrace{t^2(t+2)}^{\geq 0}}_{\text{continua}}\big) \quad t \in \underbrace{[-2, 1]}_{\text{intervallo}}$

↑
Continua

$r(-2) = (1, 0)$
$r(1) = (4, 3)$ $\neq$ $\Rightarrow$ non chiusa



$r(0) = (1, 0) = r(-2)$

$\Rightarrow$ non semplice

Considero

$x(t) = (t+1)^2, \quad y(t) = t^2(t+2)$

DA COMPLETARE ...