28 marzo 2024

Verifico che (a), (b) e (c) nella definizione di successione convergente sono tra loro equivalenti.

$$(a) \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* : \quad x_k \in B_r(x) \quad \text{definitivamente}$$

$$\iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* : \quad \| x_k - x \| < r \quad \text{definitivamente}$$

$$\iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* : \quad \big| \| x_k - x \| - 0 \big| < r \quad \text{dfnt}$$

$$\overset{AM1}{\iff} \quad \lim_{k \to +\infty} \| x_k - x \| = 0 \iff (b)$$

Dimostro che (b) e (c) sono equivalenti.

Ricordo una proprietà della norma euclidea:

$\forall y \in \mathbb{R}^n, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|y_i| \underset{①}{\leq} \|y\| \underset{②}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

Verifico che (b) ⇒ (c)

Fisso $i \in \{1, \dots, n\}$ e osservo che

$$|x_{k,i} - x_i| = |(x_k - x)_i| \overset{①}{\leq} \| x_k - x \| \qquad \forall k$$

Per ipotesi: $\| x_k - x \| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Inoltre:

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq |x_{k,i} - x_i| \leq \underbrace{\| x_k - x \|}_{\to 0} \qquad \forall k$$

$$\overset{TCO}{\implies} \quad |x_{k,i} - x_i| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0, \quad \text{cioè}: \quad \lim_{k \to +\infty} x_{k,i} = x_i$$

Dunque: (c) è verificata.

Dimostro che (c) $\Rightarrow$ (b)

Suppongo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\lim_{k \to +\infty} x_{k,i} = x_i$

$\Leftrightarrow$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_{k,i} - x_i| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

regola della somma

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_i| \to 0$ (*)

Per ② : $\forall k$: $0 \le \|x_k - x\| \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_i|}_{\substack{(*) \\ \to 0}}$

TCO

$\Rightarrow$ $\|x_k - x\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ $\Leftrightarrow$ (b) $\square$

Precisazioni su successioni limitate

- $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ è limitata $\Leftrightarrow$
  l'insieme dei valori è limitato $\Leftrightarrow$
  $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$ t.c. $\|x_k\| \le M$ $\forall k$.

- Se (x_k) è limitata, allora $(x_{k,i})$ è limitata per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$

  Motivo : $|x_{k,i}| \le \|x_k\| \le M$

- Se $(x_{k,i})$ è limitata $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, allora (x_k) è limitata.

  Motivo : $\|x_k\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_{k,i}| \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{>0} =: \underbrace{M}_{>0}$

Dimostro il teor. di Bolzano - Weierstrass

Per semplicità, considero $n=3$

Considero $((x_k, y_k, z_k))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$ e suppongo che sia limitata.

Questo implica che (x_k), (y_k), (z_k) sono successioni limitate di numeri reali.

In particolare: (x_k) è limitata, quindi per B.-W. in $\mathbb{R}$, ammette una estratta convergente.

Denoto con (x'_k) questa estratta e con x il suo limite.

Considero (y'_k), successione estratta da (y_k) avente gli stessi indici di (x'_k).

Osservo che (y'_k) è limitata (perché estratta da una succ. limitata); per B.-W. in $\mathbb{R}$,

esiste (y''_k) estratta da (y'_k) convergente a un certo $y \in \mathbb{R}$.

Considero (z''_k) succ. estratta da (z_k) avente gli stessi indici di (y''_k)

Osservo che (z''_k) è limitata e quindi, per B.-W. in $\mathbb{R}$, esiste (z'''_k) estratta da (z''_k) convergente a un certo $z \in \mathbb{R}$.

Considero (x'''_k) estratta da (x'_k) con gli stessi indici di (z'''_k); osservo che (x'''_k) converge a x (perché estratta da (x'_k) che converge a x).

Considero (y'''_k) estratta da (y''_k) con gli stessi indici di (z'''_k); osservo che (y'''_k) converge a y (perché estratta da (y''_k) che converge a y).

Dunque:

$((x'''_k, y'''_k, z'''_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è estratta da $((x_k, y_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ e dato che

$x'''_k \to x$, $\quad y'''_k \to y$, $\quad z'''_k \to z$,

risulta: $\quad (x'''_k, y'''_k, z'''_k) \to (x, y, z)$. $\square$

Dimostro l'implicazione $a \Rightarrow b$ nel teor. di Heine-Borel.

Premetto una osservazione.

Se $(x_k) \subset E$ e $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$, allora: $x \in \bar{E}$

Infatti:

- se $x \in E$, non ho nulla da dimostrare (perché $E \subseteq \bar{E}$)

• se $x \notin E$:

$x_k \to x \overset{def}{\iff} \forall r>0 : \quad x_k \in B_r(x)$ dfnt $\Big] \Rightarrow$

$\forall k: \quad x_k \in E, \quad x \notin E \quad \Rightarrow$

$x_k \neq x$

$\forall r>0$: $B_r(x)$ contiene elementi di E diversi da x

$\Rightarrow$ x è di accumulazione per E, cioè

$x \in Dr(E)$, $\quad \bar{E} = E \cup Dr(E)$

$\Rightarrow \quad x \in \bar{E} \qquad \square$

Considero ora una arbitraria successione (x_k) di elementi di E.

Dato che E è limitato, la successione (x_k) è limitata

Per B.-W. : esiste (x'_k) estratta da (x_k) convergente a un certo $x \in \mathbb{R}^n$.

Però: per l'osservazione, essendo limite di una successione di elementi di E, x appartiene a $\bar{E}$.

Ma E è chiuso per ipotesi, dunque $E = \bar{E}$;

pertanto: $x \in E$. $\qquad \square$

Esempi di funzioni continue

- Fisso $c \in \mathbb{R}^m$ e definisco

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.c. $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Prendo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e considero $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $x_k \to \bar{x}$

Valuto: $f(x_k) = c \quad \forall k$

$\Rightarrow$ $(f(x_k))$ è la succ. costante di valore c

$$\Rightarrow \quad f(x_k) \to c = f(\bar{x}) \qquad \square$$

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ proiezione i-esima

Fisso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e considero $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $x_k \to \bar{x}$

Osservo che $\pi_i(x_k) = x_{k,i} \quad \forall k$

e $\pi_i(\bar{x}) = \bar{x}_i$

Per ipotesi: $x_k \to \bar{x}$

Per la (c) della definizione di limite, ho

$$\underset{\pi_i(x_k)}{\underset{\parallel}{x_{k,i}}} \to \underset{\pi_i(\bar{x})}{\underset{\parallel}{\bar{x}_i}} \qquad \square$$

- Fisso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$; considero $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $x_k \to \bar{x}$.

Voglio provare che $\|x_k\| \to \|\bar{x}\|$

Osservo che:

$$\|x_k\| \to \|\bar{x}\| \iff \|x_k\| - \|\bar{x}\| \to 0$$

$$\iff \big| \|x_k\| - \|\bar{x}\| \big| \to 0$$

Per la 2ª disuguaglianza triangolare:

$$\forall k: \quad \underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \big| \|x_k\| - \|\bar{x}\| \big| \leq \underbrace{\|x_k - \bar{x}\|}_{\to 0}$$

(b) def. di limite

$$\overset{\text{TCO}}{\Longrightarrow} \quad \big| \|x_k\| - \|\bar{x}\| \big| \to 0 \qquad \square$$

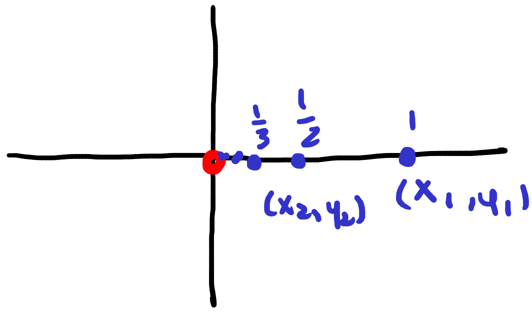
Es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifico che f NON è continua in $(0,0)$

Devo esibire una successione $((x_k, y_k))$ t.c.

$(x_k, y_k) \to (0,0)$ e $f(x_k, y_k) \not\to 0$ $(= f(0,0))$



Provo:

$x_k = \frac{1}{k}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

$y_k = 0$

Osservo che $(x_k, y_k) \to (0,0)$

Valuto $f(x_k,y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = 0$

$\Rightarrow$ $(f(x_k,y_k))$ è la succ. costante di valore 0, che tende a 0 $\quad$ Non ho concluso nulla!

Ci riprovo:

$x_k = \frac{1}{k} = y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

Osservo: $(x_k,y_k) \to (0,0)$ ✓

Valuto:

$\forall k$: $f(x_k,y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $(f(x_k,y_k))$ è la succ. costante di valore $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $f(x_k,y_k) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)$

Perciò: f non è continua in $(0,0)$. $\square$