22 marzo 2024

- $t^2 y'' - 5ty' + 9y = 2t^3 \quad (1) \qquad (t \in (0,+\infty))$

$t = e^s, \; s \in \mathbb{R}$

φ sol. di (1) per $t>0$:

$\psi(s) = \varphi(e^s)$ risolve

$$z'' - z' - 5z' + 9z = 2e^{3s} \iff$$

$$z'' - 6z' + 9z = 2e^{3s} \quad (2) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

radice : $\lambda = 3, \quad m = 2$

SFS di (2) : $\quad e^{3s}, \quad s e^{3s}$

$$b(s) = \underbrace{2}_{\text{pol. di grado 0}} \underbrace{e^{3s}}_{}$$

$\lambda = 3$, radice di P con $m = 2$

Cerco una sol. di (2) del tipo $\psi(s) = a e^{3s} s^2$

Derivo e sostituisco :

$$\psi'(s) = 3ae^{3s}s^2 + 2ae^{3s}s$$

$$\psi''(s) = 9ae^{3s}s^2 + 6ae^{3s}s + 6ae^{3s}s + 2ae^{3s}$$

$$\cancel{9ae^{3s}s^2} + \cancel{12ae^{3s}s} + 2ae^{3s} - \cancel{18ae^{3s}s^2} - \cancel{12ae^{3s}s} + \cancel{9ae^{3s}s^2} = 2e^{3s} \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad a = 1$$

Quindi: $\psi(s) = s^2 e^{3s}$ è sol. particolare di (2)

Integrale generale di (2):

$$c_1 e^{3s} + c_2\, s\, e^{3s} + s^2 e^{3s}, \quad s\in\mathbb{R} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$t = e^s \iff s = \ln(t)$$

Integrale generale di (1):

$$c_1 t^3 + c_2 t^3 \ln|t| + t^3 (\ln|t|)^2, \quad t>0 \qquad (c_1, c_2\in\mathbb{R})$$

$$t<0$$

- $$\underbrace{t^3 y'''}_{??} + \underbrace{t^2 y''}_{z''-z'} - \underbrace{2y}_{z} = t^{-3}\ln(t) \qquad t\in(0,+\infty)$$

Riprendo il conto della lezione scorsa, ripartendo dal fatto che, posto

$$\psi(s) = \varphi(e^s), \quad \text{cioè} \quad \varphi(t) = \psi(\ln(t)):$$

$$\varphi''(t) = \frac{\psi''(\ln(t)) - \psi'(\ln(t))}{t^2} \qquad \forall t>0 \implies$$

$$\varphi'''(t) = \frac{\left(\psi'''(\ln(t))\cdot\frac{1}{\cancel{t}} - \psi''(\ln(t))\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\right)\cancel{t^2}\,t - \left(\psi''(\ln(t)) - \psi'(\ln(t))\right) 2\cancel{t}}{\cancel{t^4}\ t^3}$$

$$= \frac{\psi'''(\ln(t)) - \psi''(\ln(t)) - 2\psi''(\ln(t)) + 2\psi'(\ln(t))}{t^3}$$

$$= \frac{\psi'''(\ln(t)) - 3\psi''(\ln(t)) + 2\psi'(\ln(t))}{t^3}$$

Dunque: se φ risolve (1), allora ψ risolve

$$(z''' - 3z'' + 2z') + (z'' - z') - 2z = e^{-3s} \cdot s$$

$$z''' - 2z'' + z' - 2z = se^{-3s} \qquad (2)$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = \lambda^2(\lambda - 2) + (\lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$$

$\Rightarrow$ radici: $\lambda = 2 \qquad \lambda = i \qquad \lambda = -i$

$\Rightarrow$ SFS di (2): $e^{2s}, \quad \cos(s), \quad \sin(s)$

$$b(s) = \underbrace{s}_{\text{pol. di } 1^\circ \text{ grado}} \overbrace{e^{-3s}}$$

$\lambda = -3$, non radice di P

Cerco sol. particolare del tipo $\varphi(s) = (as + b)e^{-3s}$

Derivo, sostituisco ... trovo $a = -\dfrac{1}{50} \qquad b = -\dfrac{2}{125}$

Quindi:

$$\varphi(s) = -\left(\frac{s}{50} + \frac{2}{125}\right)e^{-3s} \quad \text{sol. part. di (2)}$$

Integrale generale di (2):

$$c_1 e^{2s} + c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s) - \left(\frac{s}{50} + \frac{2}{125}\right)e^{-3s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ Integrale generale di (1):

$$c_1 t^2 + c_2 \cos(\ln(t)) + c_3 \sin(\ln(t)) - \left(\frac{\ln(t)}{50} + \frac{2}{125}\right)t^{-3},$$

$$t \in (0, +\infty) \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

$\square$

Giustifico l'ultima proprietà della norma euclidea:

$x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$: $|x_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \overset{def}{=} \|x\|$

Tesi: $\underbrace{\|x\|}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}_{\geq 0}$ $\Leftrightarrow$

$\|x\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2$ $\Leftrightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2$ Vero! $\square$

$B_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r \}$

$n = 1$: $B_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r \}$

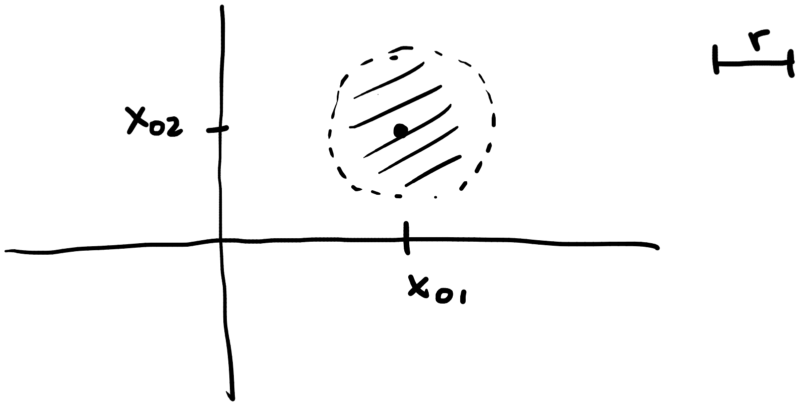
$= (x_0 - r, x_0 + r)$ intervallo aperto

$n = 2$: $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ $x = (x_1, x_2)$

$B_r(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < r \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < r^2 \}$

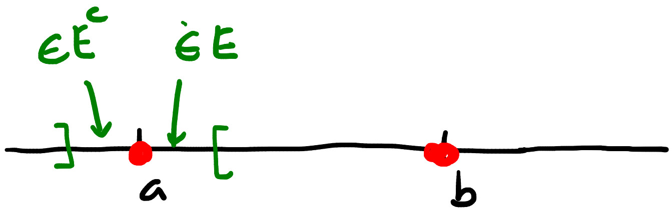


$E \subseteq \mathbb{R}^n$

$E^c := \mathbb{R}^n \setminus E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin E\}$

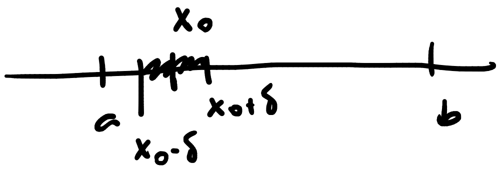
$\uparrow$

$\complement(E)$

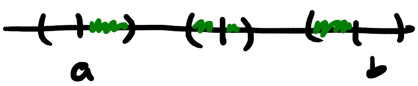


punti di frontiera

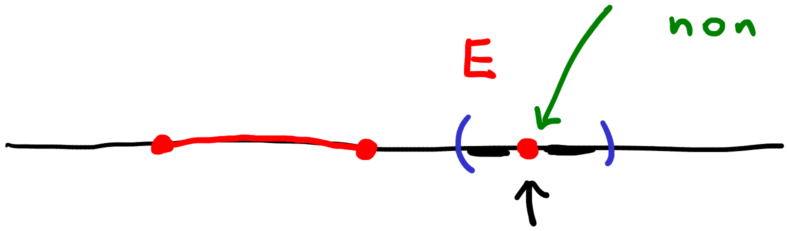
E = intervallo di estremi a, b



- punti di frontiera : a, b
- punti interni : $\forall x$ t.c. $a < x < b$
- punti esterni : $\forall x$ t.c. $x < a$ oppure $x > b$
- punti di accumulazione : $\forall x$ t.c. $a \leq x \leq b$



di frontiera,
non di accumulazione



Verifico che $E \cup \partial E = E \cup Dr(E)$

Provo che $E \cup \partial E \subseteq E \cup Dr(E)$

Fisso $x_0 \in E \cup \partial E$:

se $x_0 \in E$, ovviamente $x_0 \in E \cup Dr(E)$ ✓

se $x_0 \in \partial E$ e $x_0 \notin E$, allora:

preso un arbitrario intorno sferico di x_0, questo contiene almeno un elemento di E e almeno un elemento di E^c.

Dato che $x_0 \notin E$, l'elemento di E citato sopra è necessariamente diverso da x_0.

La frase sottolineata in verde significa che x_0 è punto di accumulazione.
In simboli: $x_0 \in Dr(E)$

Pertanto: $x_0 \in E \cup Dr(E)$ □

Provo che $E \cup Dr(E) \subseteq E \cup \partial E$

Fisso $x_0 \in E \cup Dr(E)$

Se $x_0 \in E$, ovviamente $x_0 \in E \cup \partial E$ ✓

Se $x_0 \in Dr(E)$ e $x_0 \notin E$:

per ogni $r > 0$, dato che x_0 è di accumulazione, esiste $x \in E \cap B_r(x_0)$, con $x \neq x_0$.

Dunque: $B_r(x_0)$ contiene almeno un elemento di E; inoltre $B_r(x_0)$ contiene x_0, che è un elemento di E^c.

La parte sottolineata in verde significa che x_0 è punto di frontiera.

In simboli: $x_0 \in \partial E$, quindi: $x_0 \in E \cup \partial E$. $\square$

$$\boxed{Dr(E) \subseteq E} \quad \Rightarrow \quad E \cup Dr(E) \subseteq E$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\bar{E} \subseteq E}$$

$$\underline{E} \ \underline{\subseteq} \ E \cup Dr(E) \ \underline{=: \bar{E}}$$

Verifico: E aperto $\Leftrightarrow$ E^c chiuso

E aperto $\Leftrightarrow$ $E \cap \partial E = \phi$ $\Leftrightarrow$ $\partial E \subseteq E^c$

$\partial E = \partial E^c$ $\rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\partial E^c \subseteq E^c$ $\Leftrightarrow$ E^c chiuso

Sia I un insieme qualsiasi.

$\forall i \in I$: sia $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Definisco $A := \bigcup_{i \in I} A_i$

Tesi: A è aperto.

dim.

<u>Fisso $x_0 \in A$</u>; per definizione di unione insiemistica, esiste $j \in I$ tc. $x_0 \in A_j$

A_j è un insieme aperto, quindi: <u>$\exists r > 0$ tc.</u>

$B_r(x_0) \subseteq A_j$.

Dato che $A_j \subseteq A$, deduco $\underline{B_r(x_0) \subseteq A}$.

Dunque: x_0 è interno ad A; siccome x_0 è arbitrario, concludo che A è aperto.

Siano $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ aperti.

Definisco $A := \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

Tesi: A è aperto.

Dim. Fisso $x_0 \in A$; per definizione di intersezione insiemistica:

$$x_0 \in A_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

Per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$: A_i è aperto

$\Rightarrow \exists\, r_i > 0$ t.c. $B_{r_i}(x_0) \subseteq A_i$

Pongo $r := \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ e osservo che $\underline{r > 0}$ e che

$$B_r(x_0) \subseteq \underbrace{B_{r_i}(x_0)}_{\subseteq A_i}, \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \quad B_r(x_0) \subseteq A_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{B_r(x_0) \subseteq} \bigcap_{i=1}^{k} A_i = \underline{A}$$

Dunque x_0 è interno ad A; dato che x_0 è arbitrario, A è aperto. $\square$

Es: $A_k = \left(0, 1+\frac{1}{k}\right)$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

intervallo aperto

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = (0,1]$$

aperto

non aperto! (contiene un punto di frontiera)

$$(0,1] \subseteq A_k \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad (0,1] \subseteq \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$$

Se $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$:

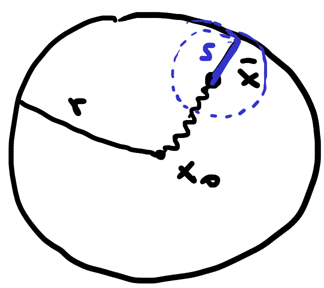
$$\forall k: \quad x \in A_k = \left(0, 1+\frac{1}{k}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\forall k: \quad \underbrace{0}_{\downarrow\, 0} < x < \underbrace{1+\frac{1}{k}}_{\downarrow\, 1} \qquad k \to +\infty$$

$$\Rightarrow \quad 0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (0,1]$$

Verifico che E_1 è un insieme aperto, con

$$E_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$$



Fisso $\bar{x} \in E_1$

$$\Rightarrow \quad \|\bar{x} - x_0\| < r$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{r - \|\bar{x} - x_0\|}_{=:\, s} > 0$$

Verifico che $B_s(\bar{x}) \subseteq E_1$

Prendo $x \in B_s(\bar{x})$ $\quad (\Leftrightarrow \|x - \bar{x}\| < s)$

Valuto

$$\|x - x_0\| = \|\overbrace{x - \bar{x}}^{y} + \overbrace{\bar{x} - x_0}^{z}\| \leq \underbrace{\|x - \bar{x}\|}_{< s} + \|\bar{x} - x_0\|$$

disug. triang.

$$< s + \|\bar{x} - x_0\|$$

$$= r - \|\bar{x} - x_0\| + \|\bar{x} - x_0\| = r$$

$\square$