19 marzo 2024

$y'' - 2y' + y = |t|$ non è una funzione polinomiale in $\mathbb{R}$

Pol. caratt. dell'omogenea associata:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Radice: $\lambda = 1$ con molteplicità 2

$\Rightarrow$ SFS $\quad \varphi_1(t) = e^t$, $\quad \varphi_2(t) = te^t$

Cerco soluz. particolari dell'eq. non omogenea in $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$

In $[0, +\infty)$: $\quad b(t) = |t| = t = e^{0t} \cdot t$

$\lambda = 0$ non è radice di P $\qquad$ polinomio di 1° grado

Cerco una soluzione del tipo

$$\varphi_+(t) = at + b$$

Derivo e sostituisco: $\quad \varphi_+'(t) = a$, $\quad \varphi_+''(t) = 0$

$$0 - 2a + at + b = t \qquad \forall t \in [0, +\infty)$$

$\Rightarrow \quad a = 1$, $\quad -2a + b = 0 \Rightarrow b = 2$

Quindi: $\quad \varphi_+(t) = t + 2$

In $(-\infty, 0)$: $\quad b(t) = |t| = -t \qquad$ come sopra

Cerco una sol. particolare del tipo

$$\varphi_-(t) = at + b$$

Derivo e sostituisco:

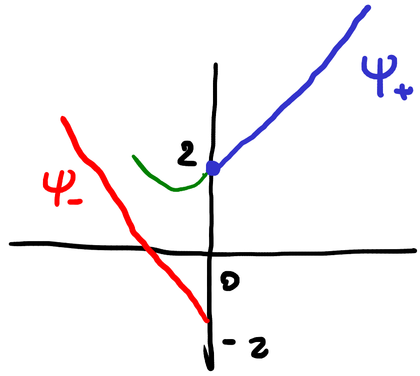
$$0 - 2a + at + b = -t \qquad \forall t \in (-\infty, 0)$$

$$\Rightarrow \quad a = -1, \qquad -2a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

Dunque: $\quad \varphi_-(t) = -t - 2$

Definisco

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t) & t \in (-\infty, 0) \\ \varphi_+(t) & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$



φ non è continua in $t = 0$

$\Rightarrow$ non è accettabile come soluzione

dell' eq. differenziale !

Osservo che in $(-\infty, 0)$ tutte le sol. particolari dell' eq. non omogenea sono del tipo

$$\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \varphi_-(t) \qquad \left(\text{deriva da } "V = V_0 + \bar{\varphi}" \right)$$

Cerco di determinare c_1 e c_2 in modo che

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi_+(0) \quad (= 2) \\ \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi'(t) = \varphi_+'(0) \quad (= 1) \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} c_1 + 0 + (-2) = 2 \\ c_1 + c_2 + (-1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Quindi considero

$$y(t) = 4e^t - 2te^t - t - 2, \qquad t \in (-\infty, 0)$$

e definisco

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} 4e^t - 2te^t - t - 2 & t \in (-\infty, 0) \\ t + 2 & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

(richiede verifica 1)

Osservo che $\bar{\varphi}$ è derivabile <u>due</u> volte anche in $t = 0$

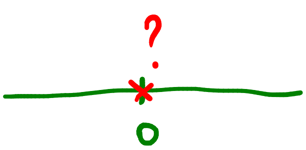
$\Rightarrow$ posso accettarla come sol. particolare dell'eq. data in $\mathbb{R}$.

Conclusione: l'integrale generale dell'eq. data è

$$\left\{ c_1 e^t + c_2 te^t + \bar{\varphi}(t),\ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

1 Per costruzione:

$$\lim_{t \to 0^+} \bar{\varphi}(t) = \lim_{t \to 0^-} \bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}(0) \Rightarrow \bar{\varphi} \text{ è continua in } t = 0 \text{ e dunque in } \mathbb{R}$$



$$\lim_{t\to 0^-} \bar{\varphi}'(t) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to 0^+} \bar{\varphi}'(t) =: \alpha \quad \underset{\uparrow}{\Rightarrow}$$

per costruzione (cioè: per come ho scelto c_1 e c_2)

conseguenza del teor. di Lagrange

$$\exists\ \bar{\varphi}'(0) = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\varphi}'(0) = \lim_{t\to 0} \bar{\varphi}'(t), \text{ cioè:}$$

$\bar{\varphi}'$ è continua in $t=0$

Dunque: $\bar{\varphi}$ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$

$\forall t \in (-\infty, 0)$:

perché $\bar{\varphi}$ risolve l'eq. in $(-\infty, 0)$

$$\bar{\varphi}''(t) = 2\bar{\varphi}'(t) - \bar{\varphi}(t) - t$$

$\forall t \in (0, +\infty)$:

perché $\bar{\varphi}$ risolve l'eq. in $(0, +\infty)$

$$\bar{\varphi}''(t) = 2\bar{\varphi}'(t) - \bar{\varphi}(t) + t$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^-} \bar{\varphi}''(t) = \lim_{t\to 0^-} \left(2\bar{\varphi}'(t) - \bar{\varphi}(t) - t\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+} \bar{\varphi}''(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(2\bar{\varphi}'(t) - \bar{\varphi}(t) + t\right)$$

sono uguali

Lagrange, applicato a $\bar{\varphi}'$ $\Rightarrow$

$$\exists\ \bar{\varphi}''(0) = \lim_{t\to 0} \bar{\varphi}''(t) \qquad \square$$

(*) $y' + a(t)\, y = b(t)$, $a, b \in C(I, \mathbb{R})$

φ_0 sol. non banale di: $y' + a(t)\, y = 0$

Cerco una sol. di (*) della forma

$$\varphi(t) = c(t)\, \varphi_0(t)$$

con c funzione di classe C^1 da determinare.

Osservo che

φ risolve (*) $\Leftrightarrow$

$\forall t \in I$: $\varphi'(t) + a(t)\, \varphi(t) = b(t)$ $\Leftrightarrow$

$\forall t \in I$: $c'(t)\, \varphi_0(t) + \underline{c(t)\, \varphi_0'(t)} + \underline{a(t)\, c(t)\, \varphi_0(t)} = b(t)$ $\Leftrightarrow$

$\forall t \in I$: $c'(t)\, \varphi_0(t) + c(t) \underbrace{(\varphi_0'(t) + a(t)\, \varphi_0(t))}_{=0 \ \forall t} = b(t)$ $\Leftrightarrow$

$\forall t \in I$: $c'(t)\, \varphi_0(t) = b(t)$ $\Leftrightarrow$

$\forall t \in I$: $c'(t) = \dfrac{b(t)}{\varphi_0(t)}$ ← è diverso da 0 $\forall t \in I$??

Sì!

<u>OSS</u>: φ_0 è sol. di $y' + a(t)\, y = 0$

Se $\exists\, t_0 \in I$ t.c. $\varphi_0(t_0) = 0$, allora φ_0 è soluzione del PdC $\begin{cases} y' + a(t)\, y = 0 \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$

ma allora φ_0 <u>coincide</u> con la funzione costante di valore 0.

Esempi

- $y' + \frac{2}{t} y = 4t$, $y(1) = 2$ $\qquad t \in (0, +\infty)$

$a(t) = \frac{2}{t}$ $\Rightarrow$ scelgo $A(t) = \ln(t^2)$

$b(t) = 4t$

Formula risolutiva:

$$\varphi(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt$$
$$= e^{-\ln(t^2)} \int e^{\ln(t^2)} \cdot 4t\, dt$$
$$= \frac{1}{t^2} \int t^2 \cdot 4t\, dt = \frac{1}{t^2} \int 4t^3\, dt$$
$$= \frac{1}{t^2} (t^4 + c) = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Impongo la condizione iniziale:

$$y(1) = 2 \iff 1 + \frac{c}{1} = 2 \iff c = 1$$

La soluzione del PdC è

$$\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t \in (0, +\infty)$$

In alternativa:

① Risolvo $y' + \underbrace{\frac{2}{t}}_{a(t)} y = 0$ $\Rightarrow$ $A(t) = \ln(t^2)$

$\Rightarrow \varphi_0(t) = e^{-\ln(t^2)} = \frac{1}{t^2}$ sol. non banale.

$$\Rightarrow \quad V_0 = \{ c\varphi_0 \mid c \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ c \cdot \frac{1}{t^2},\ t \in (0,+\infty) \mid c \in \mathbb{R} \}$$

(2) Determino una sol. dell'eq. completa del tipo

$$\bar{\varphi}(t) = \gamma(t)\varphi_0(t)$$

con γ arbitraria primitiva di: $\frac{b}{\varphi_0}$

$$\gamma(t) = \int \frac{b(t)}{\varphi_0(t)}\,dt = \int \frac{4t}{\frac{1}{t^2}}\,dt = \int 4t^3\,dt$$

$$= t^4 + \underbrace{c}_{\text{scelgo } c=0}$$

Dunque:

$$\bar{\varphi}(t) = t^4 \cdot \frac{1}{t^2} = t^2$$

è sol. particolare dell'eq. completa.

(3) Dal teor. di struttura:

$$V = V_0 + \bar{\varphi} = \{ c \cdot \frac{1}{t^2} + t^2,\ t \in (0,+\infty) \mid c \in \mathbb{R} \}$$

- $\begin{cases} y' + \frac{4}{t}\,y = \frac{1}{t^3 e^t} & t \in (-\infty, 0) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$

$a(t) = \frac{4}{t}$; scelgo $A(t) = 4 \ln(-t) = \ln(t^4)$

Formula risolutiva:

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt = e^{-\ln(t^4)} \int e^{\ln(t^4)} \frac{1}{t^3 e^t} dt$$

$$= \frac{1}{t^4} \int t^4 \cdot \frac{1}{t^3 e^t} dt = \frac{1}{t^4} \int t e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{t^4} \left[t(-e^{-t}) - \int (-e^{-t}) dt \right]$$

$$= \frac{1}{t^4} \left(-te^{-t} - e^{-t} + c \right) =: \varphi_c(t)$$

Impongo la condizione iniziale $y(-1) = 0$:

$$\frac{1}{1} \left(e - e + c \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

La sol. del PdC è

$$\varphi(t) = -\frac{(t+1)e^{-t}}{t^4}, \quad t \in (-\infty, 0).$$

- $\begin{cases} y' - 2ty = t \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$

$a(t) = -2t \Rightarrow$ scelgo $A(t) = -t^2$

Formula risolutiva:

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)} b(t)\, dt = e^{t^2} \int e^{-t^2} \cdot t\, dt$$

$$= e^{t^2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right) \int e^{-t^2}(-2t)\, dt \right)$$

$$= e^{t^2}\left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} + c \right) = -\frac{1}{2} + c\, e^{t^2} =: \varphi_c(t)$$

Impongo la cond. iniziale $y(0) = 2$:

$$-\frac{1}{2} + c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{2}$$

Soluzione: $\varphi(t) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} e^{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$

- $$\begin{cases} y' + 2ty = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$a(t) = 2t \Rightarrow$ Scelgo $A(t) = t^2$

Formula risolutiva:

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)}\, b(t)\, dt = e^{-t^2} \int \underline{\underline{e^{t^2}}} \cdot 1\, dt \qquad !!!$$

Scrivo così:

$$\varphi_c(t) = e^{-t^2}\left(\int_0^t e^{s^2}\, ds + c \right) \qquad c \in \mathbb{R}$$

Impongo la cond. iniziale $y(0) = 2$

$$1 \cdot \left(\int_0^0 e^{s^2}\, ds + c \right) = 2 \qquad \Rightarrow c = 2$$

Soluzione: $\varphi(t) = e^{-t^2}\left(2 + \int_0^t e^{s^2}\, ds \right), \quad t \in \mathbb{R}.$