$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0 \qquad \gamma > 0 \qquad (\omega_0 > 0)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \gamma^2 - \omega_0^2$$

- Se $\gamma < \omega_0$ ("poco attrito"): $\frac{\Delta}{4} < 0$

$\Rightarrow$ P ha radici complesse coniugate

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Soluzione:

$$\varphi(t) = c_1 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right) + c_2 e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

$$\left(= A e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \theta\right) \right)$$

- Se $\gamma > \omega_0$ ("molto attrito"): $\frac{\Delta}{4} > 0$

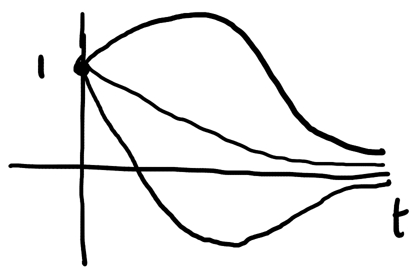
$\Rightarrow$ P ha radici reali distinte

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 < 0)$$

Soluzione:

$$\varphi(t) = c_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

Oss: $\varphi(t) \to 0 \quad t \to +\infty$



Esercizio: $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = a$

$(\gamma = \frac{3}{2} > \omega_0 = \sqrt{2})$

- Se $\lambda = \omega_0$ ("smorzamento critico") : $\frac{\Delta}{4} = 0$

$\Rightarrow$ P ha una radice reale $(\lambda = -\gamma)$ di molteplicità 2

Soluzione:

$$\varphi(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}$$
$$= e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$$

$y(0) = x_0$, $y'(0) = v_0$

$e^{-\gamma \cdot 0}(c_1 + c_2 0) = x_0 \iff c_1 = x_0$ •

$\forall t$: $\varphi'(t) = -\gamma e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t) + e^{-\gamma t} c_2$

$\varphi'(0) = 0 \iff -\gamma c_1 + c_2 = v_0$ •

$\Rightarrow$

$c_1 = x_0$

$c_2 = v_0 + \gamma x_0$

Soluzione del PdC:

$$\varphi(t) = e^{-\gamma t}(x_0 + (v_0 + \gamma x_0) t) \quad \square$$

Esempi (sul metodo di somiglianza)

- $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ $\qquad b(t) = \underbrace{3}_{\text{polinomio di grado 0}}\, \underbrace{e^{2t}}_{}$ $\quad \lambda = 2$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$\lambda = -1, \quad \lambda = 3$

Sol. dell'eq. omogenea associata:

$$\varphi_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Oss: $\lambda = 2$ <u>non</u> è radice di p, quindi la sua molteplicità (come radice di p) è $m=0$, quindi $t^m \equiv 1$.

Cerco una sol. dell'eq. non omogenea del tipo

$$\varphi(t) = \underbrace{a}_{\text{pol. di grado 0}}\, e^{2t}$$

Per determinare a, impongo che φ risolva l'eq. non omogenea.

Derivo:

$$\forall t: \quad \varphi'(t) = 2ae^{2t}, \qquad \varphi''(t) = 4ae^{2t}$$

Sostituisco nell'equazione:

$$4a\cancel{e^{2t}} - 2(2a\cancel{e^{2t}}) - 3(a\cancel{e^{2t}}) = 3\cancel{e^{2t}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{4a} - \cancel{4a} - 3a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Soluz. dell' eq. non omogenea:

$$\psi(t) = -e^{2t}$$

Integrale generale dell' eq. assegnata:

$$V = \{ \varphi_0 + \psi \mid \varphi_0 \in V_0 \}$$

$$= \{ c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - e^{2t}, \ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

- $y'' - y' - 2y = -2t + 4t^2$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$, radici $\lambda = 2$, $\lambda = -1$

$\Rightarrow$ sol. dell' eq. omog. associata

$$\varphi_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

$$b(t) = (\underbrace{-2t + 4t^2}_{\text{polinomio di grado 2}}) \cdot e^{0t}$$

$\lambda = 0$, non è radice di P

$\Rightarrow t^m \equiv 1$

Cerco una sol. particolare del tipo

$$\psi(t) = (at^2 + bt + c)\, e^{0t} \cdot 1$$

$$= at^2 + bt + c$$

Derivo:

$$\psi'(t) = 2at + b, \qquad \psi''(t) = 2a$$

Sostituisco nell' eq. non omogenea:

$$\forall t: \quad 2a - (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = -2t + 4t^2 + 0$$

Per il principio di identità dei polinomi, l'uguaglianza vale se e solo se i coefficienti dei termini di pari grado sono a due a due uguali:

$$\begin{cases} -2a = 4 & a = -2 \\ -2a - 2b = -2 & a + b = 1 \qquad b = 1 - a = 3 \\ 2a - b - 2c = 0 & 2c = 2a - b \qquad c = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$\varphi(t) = -2t^2 + 3t - \frac{7}{2}$$

Integrale generale dell'eq. assegnata:

$$V = \left\{ c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 2t^2 + 3t - \frac{7}{2},\ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 9$, radici $\lambda = \pm i3$

$\Rightarrow \varphi_0(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$

$$b(t) = \underbrace{t^2}_{\text{pol. di grado 2}} \underbrace{e^{3t}}_{\lambda = 3} + \underbrace{6}_{\text{pol. di grado 0}} \cdot \underbrace{e^{0t}}_{\lambda = 0}$$

non è radice di P

diversi!

non è radice di P

$b_1(t) := t^2 e^{3t}$ $\qquad\qquad$ $b_2(t) = 6$

Cerco soluzioni di:

$\ldots = b_1(t)$ e $\ldots = b_2(t)$

Per b_1, cerco $\varphi_1(t) = (at^2 + bt + c)e^{3t}$

Derivo:

$$\varphi_1'(t) = (2at + b)e^{3t} + 3(at^2 + bt + c)e^{3t}$$

$$\varphi_1''(t) = 2ae^{3t} + 3(2at+b)e^{3t} + 3(2at+b)e^{3t} + 9(at^2+bt+c)e^{3t}$$

Sostituisco:

$$\underbrace{2ae^{3t} + 6(2at+b)e^{3t} + 9(at^2+bt+c)e^{3t}}_{\varphi''(t)} +$$

$$+ 9\underbrace{(at^2+bt+c)e^{3t}}_{\varphi(t)} = t^2 e^{3t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Equivale a:

$$2a + 6(2at + b) + 18(at^2 + bt + c) = t^2 + 0 + 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per il P.I.P.:

$$\begin{cases} 18a = 1 \\ 12a + 18b = 0 \\ 2a + 6b + 18c = 0 \end{cases} \qquad a = \frac{1}{18}, \quad b = -\frac{2}{3}a = -\frac{1}{27}, \quad c = -\frac{a+3b}{9} = \frac{1}{162}$$

Soluzione:

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{27}t + \frac{1}{162}\right)e^{3t}$$

Per $b_2(t) = 6 \cdot e^{0t}$ (pol. grado 0), cerco soluzione del tipo

$$\psi_2(t) = a \cdot e^{0t} \cdot 1 = a$$

Derivo e sostituisco:

$$0 + 9a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \psi_2(t) = \frac{2}{3}$$

Per il principio di sovrapposizione:

$\psi_1 + \psi_2$ è sol. dell'equazione con termine noto $b = b_1 + b_2$.

Integrale generale dell'eq. assegnata:

$$V = \left\{ c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) + \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{1}{27}t + \frac{1}{162}\right)e^{3t} + \frac{2}{3},\ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2t)$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 \qquad \lambda = -1 \pm i2$

$\Rightarrow$ SFS: $e^{-t}\cos(2t)$, $e^{-t}\sin(2t)$

$$b(t) = e^{0t}(3\sin(2t) + 0 \cdot \cos(2t))$$

pol. di grado 0

$\alpha = 0$

$\beta = 2$

$\alpha + i\beta = 0 + i2$ è radice di P? No! $\Rightarrow t^m \equiv 1$

Cerco una soluzione del tipo

$$\varphi(t) = e^{0t}\left(a\sin(2t) + b\cos(2t)\right)\cdot 1$$

$$= a\sin(2t) + b\cos(2t)$$

Derivo: $\varphi'(t) = 2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)$

Derivo e sostituisco:

$$\underbrace{-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}_{\varphi''(t)} + 2\left(\underbrace{2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)}_{\varphi'(t)}\right) +$$

$$+ 5\left(\underbrace{a\sin(2t) + b\cos(2t)}_{\varphi(t)}\right) = 3\sin(2t)$$

$$\underbrace{(-4a - 4b + 5a)}\sin(2t) + \underbrace{(-4b + 4a + 5b)}\cos(2t)$$

$$= \underbrace{3}\sin(2t) + 0\cos(2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a - 4b = 3 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 16a = 3 \\ b = -4a \end{cases} \qquad a = \frac{3}{17} \quad b = -\frac{12}{17}$$

Soluzione:

$$\varphi(t) = \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t)$$

Integrale generale dell' eq. assegnata:

$$V = \left\{ c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t),\ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

radice: $\lambda = -1$ molteplicità 2

SFS: e^{-t}, te^{-t}

$b(t) = \underbrace{2}_{\text{pol. di grado 0}} \underbrace{e^{-t}}_{\lambda=-1}$, che $\underline{\underline{\bar{e}}}$ radice di P con $m=2$

Cerco una sol. particolare del tipo

$$\varphi(t) = \underbrace{a}_{\text{pol. di grado 0}} e^{-t} \underbrace{t^2}_{\text{"correzione"}} = at^2 e^{-t}$$

Derivo e sostituisco: $\varphi'(t) = 2ate^{-t} - at^2e^{-t}$

$$2ae^{-t} - 2ate^{-t} - 2ate^{-t} + at^2e^{-t} + 2(2ate^{-t} - at^2e^{-t}) + $$
$$+ at^2e^{-t} = 2e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Equivale a:

$$2a - \cancel{2at} - \cancel{2at} + \cancel{at^2} + 2(\cancel{2at} - \cancel{at^2}) + \cancel{at^2} = 2$$

$$2a = 2 \qquad a = 1$$

$\Rightarrow$ soluzione $\varphi(t) = t^2e^{-t}$

Integrale generale:

$$\{c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + t^2e^{-t},\ t \in \mathbb{R} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

- $y^{(4)} - y = 3t + \cos(t)$

$P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$

Radici: $1, \ -1, \ \pm i$

SFS: $e^t, \quad e^{-t}, \quad \cos(t), \quad \sin(t)$

$$b(t) = \underbrace{3t}_{=: b_1(t)} + \underbrace{\cos(t)}_{=: b_2(t)}$$

$$b_1(t) = \underbrace{3t}_{\substack{\text{pol.} \\ \text{grado } 1}} \cdot e^{0t}$$

$\lambda = 0$ non $\underline{\text{è}}$ radice di P

Cerco una soluzione del tipo

$$\varphi_1(t) = (at+b) \cdot e^{0t} \cdot 1 = at + b$$

Derivo e sostituisco:

$$\varphi_1'(t) = a, \qquad \varphi_1''(t) = \varphi_1'''(t) = \varphi_1^{(4)}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 - (at+b) = 3t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -a = 3 \\ -b = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a = -3 \\ b = 0 \end{matrix} \quad \Big| \Rightarrow \varphi_1(t) = -3t$$

$$b_2(t) = \cos(t) = e^{0t}\left[\underbrace{1}_{\substack{\text{pol.} \\ \text{grado } 0}} \cdot \cos(1 \cdot t) + \underbrace{0}_{\text{idem}} \cdot \sin(1 \cdot t)\right]$$

$\alpha = 0$ $\qquad$ $\beta = 1$

$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i \quad \underline{\underline{\text{è}}}$ radice di P con $m = 1$

Cerco una sol del tipo:

$$\varphi_2(t) = e^{0t}\left[a\cos(t) + b\sin(t)\right] t^1 = at\cos(t) + bt\sin(t)$$

Derivo e sostituisco:

$$\varphi_2'(t) = a\cos(t) - at\sin(t) + b\sin(t) + bt\cos(t)$$
$$= (a+bt)\cos(t) + (b-at)\sin(t)$$

$$\varphi_2''(t) = b\cos(t) - (a+bt)\sin(t) - a\sin(t) + (b-at)\cos(t)$$
$$= (2b-at)\cos(t) - (2a+bt)\sin(t)$$

$$\varphi_2'''(t) = -a\cos(t) - (2b-at)\sin(t) - b\sin(t) - (2a+bt)\cos(t)$$
$$= -(3a+bt)\cos(t) - (3b-at)\sin(t)$$

$$\underline{-b\cos(t)} + \underline{(3a+bt)\sin(t)} + \underline{a\sin(t)} - \underline{(3b-at)\cos(t)} +$$
$$\underline{-at\cos(t)} - \underline{bt\sin(t)} = \underline{\cos(t)} + 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -b - (3b - \cancel{at}) - \cancel{at} = 1 \\ 3a + \cancel{bt} + a - \cancel{bt} = 0 \end{cases} \qquad \cancel{\forall t \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} -4b = 1 \\ 4a = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b = -\frac{1}{4} \\ a = 0 \end{array}$$

Soluzione: $\varphi_2(t) = -\frac{1}{4} t \sin(t)$

Soluzione particolare dell' eq. assegnata:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = -3t - \frac{1}{4} t \sin(t)$$

Integrale generale:

$$\left\{ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) - 3t - \frac{t}{4}\sin(t),\ t \in \mathbb{R} \ \middle|\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $y''' - y'' - y' + y = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1)$$
$$= (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

Radici: $\lambda = 1 \quad m = 2$

$\lambda = -1 \quad m = 1$

$$\ldots = \underbrace{(3t^2 + 5t)}_{\text{pol. di grado } 2} e^{0t} \qquad \psi(t) = at^2 + bt + c$$

$P(0) \neq 0$

$$\ldots = \underbrace{(3t^2 + 5t)}_{\text{pol. di grado } 2} \underbrace{e^{-t}}$$

$\lambda = -1$, radice di P con $m = 1$

$$\Rightarrow \psi(t) = (at^2 + bt + c) e^{-t} t^1$$
$$= (at^3 + bt^2 + ct) e^{-t}$$

$$\ldots = \underbrace{(3t^2 + 5t)}_{\text{pol. di grado } 2} \underbrace{e^{t}}$$

$\lambda = 1$, radice di P con $m = 2$

$$\Rightarrow \psi(t) = (at^2 + bt + c) e^{t} \cdot t^2$$
$$= (at^4 + bt^3 + ct^2) e^{t}$$

$$\ldots = \sin(t) = e^{0t}[1 \cdot \sin(1 \cdot t) + 0 \cos(1 \cdot t)]$$

$0 + i1 = i$ non è radice di P

$$\psi(t) = a \sin(t) + b \cos(t) \quad \Rightarrow$$

• $y''' - y'' + y' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda - 1) + \lambda - 1$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$

Radici: $1, \; i, \; -i \qquad (m = 1)$

$\ldots = \sin(t) = e^{0t}[1 \cdot \sin(1 \cdot t) + 0 \cos(1 \cdot t)]$

$0 + i1 = i$ è radice di P con $m = 1$

$\Rightarrow \psi(t) = e^{0t}[a \sin(t) + b \cos(t)]\, t^1$

$= at \sin(t) + bt \cos(t)$

$\ldots = e^t(1 + \sin(t))$

$= e^t + e^t \sin(t)$ (principio di sovrapp.)

$\ldots = \underbrace{1}_{\text{pol. di grado } 0} \cdot e^{\underline{t}}$

$\lambda = 1$ radice di P con $m = 1$

$\psi_1(t) = a e^t t^1 = ate^t$

$\ldots = e^t \sin(t) = e^{1 \cdot t}[1 \cdot \sin(1 \cdot t) + 0 \cdot \cos(1 \cdot t)]$

$\alpha + i\beta = 1 + i1 = 1 + i$ non è radice di P

$\psi_2(t) = e^t(a \sin(t) + b \cos(t)) \cdot 1$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ soluz. dell'eq. data.

$$\ldots = t\sin(t) + 2\cos(t)$$

$$= e^{0\cdot t}\left(\underbrace{t}_{\substack{\text{pol.}\\ \text{di grado } 1}}\sin(1\cdot t) + \underbrace{2}_{\substack{\text{pol.}\\ \text{di grado } 0}}\cos(1\cdot t)\right)$$

$\alpha + i\beta = 0 + i1 = i$ è radice di p con $m=1$

$$\Rightarrow \psi(t) = e^{0t}\left((at+b)\sin(t) + (ct+d)\cos(t)\right)\cdot t^1$$

$$= (at^2+bt)\sin(t) + (ct^2+dt)\cos(t)$$

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \delta\sin(\omega t)$$

$\omega_0 > 0$

$\gamma \geq 0$

$\delta > 0$

$\omega > 0$

$$b(t) = \delta\sin(\omega t)$$

$$= e^{0t}\left[\delta\sin(\omega t) + 0\cdot\cos(\omega t)\right]$$

$\alpha = 0$, $\beta = \omega$ $\quad 0 + i\omega = i\omega$ è radice di p?

1° caso: $\gamma > 0$

Le radici di p sono, a seconda di γ e ω_0:

- complesse coniugate con parte reale < 0
- reali distinte < 0
- reale con molteplicità 2, < 0

In qualsiasi caso, non sono immaginarie pure

$\Rightarrow P(i\omega) \neq 0$.

Posso quindi cercare una soluzione del tipo

$$\varphi(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

2° caso: $\gamma = 0$.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega_0^2 \quad , \text{ radici } \quad \lambda = \pm i\omega_0$$

Se $\omega \neq \omega_0$: $P(i\omega) \neq 0$

cerco $\varphi(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

Se $\omega = \omega_0$: $P(i\omega) = P(i\omega_0) = 0$

Una sol. particolare è del tipo

$$\varphi(t) = \left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right) t$$

Sol. generale dell' eq. diff:

$$\varphi(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \varphi(t)$$

$$= (C_1 + at)\cos(\omega_0 t) + (C_2 + bt)\sin(\omega_0 t)$$