7 marzo 2024

Dimostro il teor. di struttura

(b) Osservo che

$$V_0 := \{\varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ risolve l'eq. omogenea associata}\}$$

$$= \{\varphi \in C^n(I, \mathbb{R}) \mid L(\varphi) = 0\}$$

funzione identicamente nulla ("zero" di $C(I,\mathbb{R})$)

$$= \ker(L)$$

Ricordo dal corso di Geometria che il nucleo di una applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio.

In alternativa:

$V_0 \neq \emptyset$ perché contiene la funzione identicamente nulla.

$\varphi, \psi \in V_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in V_0 \iff L(\varphi) = 0 \\ \psi \in V_0 \iff L(\psi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$L(\alpha\varphi + \beta\psi) \underset{L \text{ lineare}}{=} \alpha \underbrace{L(\varphi)}_{=0} + \beta \underbrace{L(\psi)}_{=0} = 0$$

$$\iff \alpha\varphi + \beta\psi \in V_0 \quad \square$$

Ricordo (sempre dal corso di Geometria)

che:

- due spazi vettoriali isomorfi hanno la stessa dimensione

  esiste un'applicazione lineare bigettiva tra i due spazi vettoriali

- $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n.

Dunque: per provare che V_0 ha dimensione n mi basta provare che è isomorfo a $\mathbb{R}^n$, cioè costruire un isomorfismo tra V_0 e $\mathbb{R}^n$.

Fisso $t_0 \in I$. Definisco $T: V_0 \to \mathbb{R}^n$ ponendo per ogni $\varphi \in V_0$:

$$T(\varphi) = \underbrace{(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0))}_{n}$$

Verifico che T è lineare:

$\varphi, \psi \in V_0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$T(\alpha\varphi + \beta\psi) =$

$= ((\alpha\varphi + \beta\psi)(t_0), (\alpha\varphi + \beta\psi)'(t_0), \dots, (\alpha\varphi + \beta\psi)^{(n-1)}(t_0))$

$= (\alpha\varphi(t_0) + \beta\psi(t_0), (\alpha\varphi' + \beta\psi')(t_0), \dots, (\alpha\varphi^{(n-1)} + \beta\psi^{(n-1)})(t_0))$

$= (\alpha\varphi(t_0) + \beta\psi(t_0), \alpha\varphi'(t_0) + \beta\psi'(t_0), \dots, \alpha\varphi^{(n-1)}(t_0) + \beta\psi^{(n-1)}(t_0))$

somma in $\mathbb{R}^n$

$= (\alpha\varphi(t_0), \alpha\varphi'(t_0), \dots, \alpha\varphi^{(n-1)}(t_0)) + (\beta\psi(t_0), \beta\psi'(t_0), \dots, \beta\psi^{(n-1)}(t_0))$

moltipl. in $\mathbb{R}^n$

$= \alpha(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) + \beta(\psi(t_0), \psi'(t_0), \dots, \psi^{(n-1)}(t_0))$

$= \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$ $\square$

Verifico che T è bigettiva, cioè che

(*) $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists! \varphi \in V_0$ t.c. $T(\varphi) = x$

Riscrivo (*) :

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \exists! \varphi \in V_0$ t.c.

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Questo equivale a:

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \exists! \varphi$ soluzione dell' eq. omogenea t.c.

$$\varphi(t_0) = x_1, \quad \varphi'(t_0) = x_2, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_n$$

cioè:

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \exists!$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\, y = 0 \\ y(t_0) = x_1, \; y'(t_0) = x_2, \; \dots, \; y^{(n-1)}(t_0) = x_n \end{cases}$$

Quest' ultima affermazione è vera in virtù del teor. di esistenza e unicità globale, che è applicabile perché $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sono funzioni continue (per ipotesi).

(c) Sia $\bar{\varphi}$ una sol. particolare dell' eq.

non omogenea; dunque: $L(\bar{\varphi}) = b$.

Voglio provare due inclusioni:

$$V \subseteq V_0 + \bar{\varphi} \quad e \quad V_0 + \bar{\varphi} \subseteq V$$

Per la prima:

fisso $\varphi \in V$ e osservo che

- $\varphi = (\varphi - \bar{\varphi}) + \bar{\varphi}$
- $L(\varphi - \bar{\varphi}) \underset{\uparrow}{=} \overbrace{L(\varphi)}^{=b} - \overbrace{L(\bar{\varphi})}^{=b} = b - b = 0$

L lineare $\nwarrow$ $\varphi \in V \iff L(\varphi) = b$

$$\iff \varphi - \bar{\varphi} \in V_0$$

Quindi: $\varphi = \underbrace{\varphi - \bar{\varphi}}_{\in V_0} + \bar{\varphi} \in V_0 + \bar{\varphi}$ $\square$

Per la seconda inclusione:

fisso $\varphi \in V_0 + \bar{\varphi} \Rightarrow \exists\, \varphi_0 \in V_0$ t.c. $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$

Valuto

$$\underline{L(\varphi)} = L(\varphi_0 + \bar{\varphi}) = \underbrace{L(\varphi_0)}_{=0} + \underbrace{L(\bar{\varphi})}_{=b}$$

$$= 0 + b = \underline{b} \qquad (\varphi_0 \in V_0)$$

$\Rightarrow \varphi \in V$. $\square$

$\square$

Richiamo

Sia V un qualsiasi spazio vettoriale (reale)

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$

Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se esistono $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, non tutti uguali a $\underbrace{0}_{\text{di } \mathbb{R}}$, tali che

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \underbrace{0}_{\text{di } V}$$

Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti se non sono lin. dipendenti, cioè:

se $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ e $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$,
allora: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

(A parole: l'unica combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ che sia uguale a 0 è quella con tutti i coefficienti uguali a 0.)

Oss:

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I, \mathbb{R})$ sono lin. indipendenti

se e solo se:

l'unica combinazione lineare di $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ che sia uguale alla funzione identicamente nulla è quella con tutti i coefficienti uguali a 0.

In simboli:

se $c_1, .., c_n \in \mathbb{R}$ e

$$(c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n)(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$[\, c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I \,]$$

allora: $c_1 = \dots = c_n = 0$

Es: $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0 \qquad t \in (0,+\infty)$

$\varphi_1(t) = t^2 \qquad \varphi_2(t) = t$

$n = 2 \qquad a_0(t) = \frac{2}{t^2}, \qquad a_1(t) = -\frac{2}{t}$

- φ_1 è soluzione?

φ_1 è deriv. due volte

$\forall t \in (0,+\infty)$: $\quad \varphi_1'(t) = 2t, \qquad \varphi_1''(t) = 2$

$\Rightarrow$ $\forall t \in (0,+\infty)$:

$$\underbrace{\varphi_1''(t) - \frac{2}{t}\varphi_1'(t) + \frac{2}{t^2}\varphi_1(t)} =$$

$$2 - \frac{2}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t} + \frac{2}{\cancel{t^2}} \cdot \cancel{t^2} = 2 - 4 + 2 \,\underbrace{= 0}\ ✓$$

- φ_2 è soluzione? $\qquad \varphi_2(t) = t$

$\forall t \in (0,+\infty)$: $\quad \varphi_2'(t) = 1, \qquad \varphi_2''(t) = 0$

$\Rightarrow$ $\forall t \in (0,+\infty)$:

$$\varphi_2''(t) - \frac{2}{t}\varphi_2'(t) + \frac{2}{t^2}\varphi_2(t) =$$

$$0 - \frac{2}{t}\cdot 1 + \frac{2}{t^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{t} = -\frac{2}{t} + \frac{2}{t} = 0$$

$\forall t \in (0,+\infty)$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \forall t \in (0,+\infty): \quad \det(W(t)) = t^2 - 2t^2 = -t^2$$