

a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Ottimizzazione libera e vincolata

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;  
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

## Estremi locali

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{x} \in A$ .

Diciamo che  $\bar{x}$  è un **punto di massimo locale per  $f$**  se esiste un intorno  $U$  di  $\bar{x}$  tale che  $f(x) \leq f(\bar{x})$  per ogni  $x \in U \cap A$ .

Diciamo che  $\bar{x}$  è un **punto di minimo locale per  $f$**  se esiste un intorno  $U$  di  $\bar{x}$  tale che  $f(x) \geq f(\bar{x})$  per ogni  $x \in U \cap A$ .

Diciamo che  $\bar{x}$  è un **punto di estremo locale per  $f$**  se è **punto di massimo** o **di minimo locale**.

Il **valore di  $f$**  in un punto di estremo locale si chiama **estremo locale di  $f$** .

## Esempi

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$

**Teorema (di Fermat)**  $\leftarrow$  analogo al teorema visto in Analisi I

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $\bar{x}$  un punto di estremo locale per  $f$ .

Supponiamo che  $\bar{x}$  sia interno ad  $A$  e che  $f$  sia differenziabile in  $\bar{x}$ .

Allora:  $df_{\bar{x}} = 0$ .  $\leftarrow$  zero di  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

*Dimostrazione ...* 

### Osservazione

In base al teorema di Fermat i punti interni al dominio di  $f$  candidati a essere punti di estremo locale di  $f$  sono:

- i punti in cui  $f$  è differenziabile con differenziale nullo
  - i punti in cui  $f$  non è differenziabile.
- punti  
stazionari

I punti interni stazionari che non sono punti di estremo locale si chiamano punti di sella. Esempio ...

## Nota

$\bar{x}$  è un punto stazionario per  $f$  se e solo se  $f$  è differenziabile in  $\bar{x}$  e

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \quad \left( \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right)$$

Significato geometrico (per  $n = 2$ ) ...

## Esempi

Determinare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3y - y + x^2z^2$

È possibile **classificare** i punti stazionari di una funzione (cioè **stabilire se sono punti di massimo locale, di minimo locale, oppure di sella**) senza ricorrere alla definizione, ossia senza dover risolvere disequazioni in due o più variabili?

## Classificazione dei punti stazionari

### Teorema

Siano  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$  **stazionario** per  $f$ .

Supponiamo che  $f$  sia **di classe  $C^2$  in un intorno di  $\bar{x}$** .

Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  un **autovalore** di  $H_f(\bar{x})$  e sia  $v \in \mathbb{R}^n$  un **autovettore** corrispondente.  
(cioè:  $v \neq 0$  e  $H_f(\bar{x}) v = \lambda v$ )

Allora:

- se  $\lambda > 0$ , la restrizione di  $f$  alla retta passante per  $\bar{x}$  individuata da  $v$  ha in  $\bar{x}$  un punto di **minimo locale**;
- se  $\lambda < 0$ , la restrizione di  $f$  alla retta passante per  $\bar{x}$  individuata da  $v$  ha in  $\bar{x}$  un punto di **massimo locale**.

*Dimostrazione ...* 

simmetrica, perché  $f$  è di classe  $C^2$



Nota: ha senso parlare del **segno** degli autovalori di  $H_f(\bar{x})$  in quanto sono tutti numeri **reali**.

## Osservazione

Se  $\lambda = 0$  è autovalore della matrice hessiana, sul comportamento della restrizione di  $f$  alla retta passante per  $\bar{x}$  individuata da un autovalore corrispondente non si può fare alcuna previsione.

Esempi:

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad f(x, y) = x^2 - y^4, \quad f(x, y) = x^2 + y^3$$

### Corollario (classificazione dei punti stazionari)

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\bar{x}$  un punto interno di  $A$  stazionario per  $f$ .  
Supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^2$  in un intorno di  $\bar{x}$ .

- 1 Se  $H_f(\bar{x})$  ammette due autovalori discordi, allora  $\bar{x}$  è punto di sella per  $f$ .
- 2 Se tutti gli autovalori di  $H_f(\bar{x})$  sono strettamente positivi, allora  $\bar{x}$  è punto di minimo locale per  $f$ .
- 3 Se tutti gli autovalori di  $H_f(\bar{x})$  sono strettamente negativi, allora  $\bar{x}$  è punto di massimo locale per  $f$ .

Il punto 1 segue immediatamente dal teorema; i punti 2 e 3 richiedono una dimostrazione, che omettiamo per brevità.

### Nota

La matrice hessiana è detta indefinita nel caso 1, definita positiva nel caso 2, definita negativa nel caso 3.

## Esempi

Determinare e classificare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$
- $f(x, y) = \ln(1 + x + y) - x - y^2$
- $f(x, y, z) = x^3 y - y + x^2 z^2$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$
- $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2$  ???



## Osservazione

Se la matrice hessiana è **semidefinita ma non definita**, cioè ha almeno **un autovalore uguale a 0** e tutti gli autovalori non nulli concordi tra loro, il teorema sulla classificazione dei punti stazionari **non** è applicabile.

Tenendo conto del teorema di pagina 4, in base al segno degli autovalori non nulli (se ce ne sono) si può **formulare una congettura** sulla natura del punto stazionario, da confermare oppure confutare risolvendo disequazioni oppure individuando restrizioni della funzione per le quali il punto stazionario ha natura diversa da quella congetturata.

## Esempi

Classificare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x y^3$

- $f(x, y) = 24 x^4 + 3 y^4 - (x - y)^2$

- $f(x, y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3$

- $f(x, y) = x^4 + x^2 (y^2 - 1)$

↑ luogo di punti stazionari

## Esempi

Determinare gli estremi locali e globali delle funzioni

- $f(x, y) = (x + y)^3 |x|$
- $f(x, y) = (x^3 + 2xy^2 - x)^{1/3}$
- $f(x, y) = xy^2 e^{2x+y}$
- $f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = (y^2 - 1) \ln(x^2 + y^2)$

## Estremi vincolati (per funzioni di due o tre variabili)

Consideriamo alcuni problemi:

- determinare gli estremi globali della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

nell'insieme  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

- determinare la minima distanza tra l'origine e l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 16\};$$

- determinare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, avente volume massimo, se l'area della superficie è 12.

Per risolvere questi problemi bisogna determinare punti di estremo in insiemi **chiusi**, che quindi contengono i punti della propria frontiera; in tali punti, gli strumenti utilizzati in precedenza (teorema di Fermat, studio degli autovalori della matrice hessiana) non sono applicabili. **Come si fa?**

Affrontiamo la questione da un punto di vista generale, notando che gli esempi considerati sono accomunati dal fatto che le variabili sono soggette a una relazione di uguaglianza. Iniziamo con funzioni di due variabili.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme aperto e  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ .

Sia  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$  e sia  $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ .

Supponiamo  $Z \neq \emptyset$ .

Gli estremi della restrizione di  $f$  all'insieme  $Z$  si chiamano **estremi vincolati di  $f$** ; l'insieme  $Z$  si chiama **vincolo (di uguaglianza)**.

### Osservazione

Se il vincolo  $Z$  è il sostegno di una curva semplice regolare, con parametrizzazione  $r$  definita nell'intervallo  $I$ , allora:

la ricerca degli estremi vincolati di  $f$  si riduce alla ricerca degli estremi della funzione  $t \in I \mapsto f(r(t)) \in \mathbb{R}$ . ↑ problema di AM I

## Esempio

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

sulla circonferenza unitaria; utilizzare quanto trovato per determinare gli estremi globali di  $f$  nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Come si possono identificare i candidati punti di estremo vincolato in mancanza di una parametrizzazione del vincolo?

## Teorema (della funzione implicita in $\mathbb{R}^2$ )

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme aperto e  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ .

Siano  $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$  e  $(x_0, y_0) \in Z$ .

Supponiamo  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Allora:  $\nwarrow$  derivata parziale di  $g$  rispetto a  $y$

- esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  e un intorno  $V$  di  $y_0$  tali che per ogni  $x \in U$  esiste uno e un solo elemento  $y$  di  $V$  per cui risulti  $g(x, y) = 0$ ;
- associando a ciascun  $x$  di  $U$  l'unico elemento di  $V$  previsto al punto precedente si ottiene una funzione  $h : U \rightarrow V$ , tale che  $h(x_0) = y_0$ ;
- $h$  è di classe  $C^1$  e per ogni  $x \in U$ :

$$h'(x) = -\frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}. \quad (*)$$

Significato ed esempi ...

La funzione  $h$  si dice **definita implicitamente** dall'equazione  $g(x, y) = 0$ . 13

## Osservazione

Nelle ipotesi e con le notazioni del teorema, l'insieme  $Z \cap (U \times V)$  è il **grafico** della funzione  $h$ , reale di una variabile reale e di classe  $C^1$ , dunque coincide con il **sostegno della curva grafico** associata ad  $h$ , parametrizzata da  $r(x) = (x, h(x))$ ,  $x \in U$ . **curva semplice, non chiusa e regolare**

Valutando  $(*)$  in  $x_0$  si ottiene

$$0 = g_x(x_0, h(x_0)) + g_y(x_0, h(x_0)) h'(x_0) = \nabla g(x_0, y_0) \cdot r'(x_0),$$

quindi:  $\nabla g(x_0, y_0)$  è ortogonale al vettore tangente a  $Z$  in  $(x_0, y_0)$ .

## Nota

Se nel teorema si suppone  $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ , vale un analogo risultato nel quale la funzione definita implicitamente dipende dalla variabile  $y$ .

Resta valido quanto osservato qui sopra sul gradiente.

## Nota

Il teorema della funzione implicita e la successiva osservazione si possono applicare a un generico **insieme di livello** di  $g$ , cioè all'insieme

$$E_c := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = c\}, \quad (Z = E_0)$$

con  $c \in \mathbb{R}$ .

In particolare, in ogni punto dell'insieme di livello **il vettore gradiente** di  $g$ , se non nullo, **è ortogonale alla retta tangente all'insieme di livello**.

**Esempio ...**

**Siamo pronti a identificare i candidati punti di estremo vincolato ...**



### Teorema (“di Fermat sui vincoli”)

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme aperto e  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ .

Siano  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$  e  $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ .

Sia  $(x_0, y_0) \in Z$  tale che  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ .

Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  sia un **punto di estremo locale vincolato** per  $f$ .

Allora:

$\nabla f(x_0, y_0)$  è **ortogonale** al vettore tangente a  $Z$  in  $(x_0, y_0)$ .

### Corollario (**teorema dei moltiplicatori di Lagrange** in $\mathbb{R}^2$ )

Nelle ipotesi del teorema, esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  risolve il sistema

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{“parallelismo” tra } \nabla f(x_0, y_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0) \\ \leftarrow \text{appartenenza al vincolo} \end{array} \right\}$$

$\nwarrow$  **moltiplicatore di Lagrange**

Nota: le soluzioni del sistema (\*) sono i punti stazionari della funzione **lagrangiana**  $L : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

### Osservazione

In base al teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i **candidati** punti di estremo vincolato su  $Z$  di  $f$  sono:

- i punti del vincolo  $Z$ , in cui  $\nabla g$  è diverso da  $(0, 0)$ , che sono stazionari per la funzione lagrangiana;
- i punti del vincolo  $Z$  in cui  $\nabla g$  è uguale a  $(0, 0)$ . **(punti singolari)**

### Esempi

Determinare i punti singolari dei seguenti vincoli:

$$\begin{array}{ll} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 = 0\} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1 + 4x) - y^2 = 0\} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x e^y - y = 0\} \end{array}$$

## Esempi

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per

- determinare gli estremi globali della funzione  $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$  sulla circonferenza unitaria; già fatto, ma lo ripetiamo
- determinare la minima distanza tra l'origine e l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 16\}.$$

Risoluzione grafica . . .

## Estremi vincolati per funzioni di tre variabili (solo qualche cenno)

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  un insieme aperto e  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ .

La definizione di **estremi vincolati** è identica a quella data per funzioni di due variabili, ma consideriamo due diversi tipi di vincoli per  $f$ :

① l'insieme degli zeri di una funzione  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ;  $\mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$

② l'insieme degli zeri di una funzione  $G \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ .  $\mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$

per funzioni di due variabili:  $\mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$

### Esempi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x y - 1 = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0, \quad 2x + 4y - z = 0\}$$

## Osservazione

Come per le funzioni di due variabili, se il vincolo è sostegno di una curva semplice regolare con parametrizzazione  $r$  definita in un intervallo  $I$ , la ricerca degli estremi vincolati di  $f$  si riduce alla ricerca degli estremi della funzione di una variabile  $t \in I \mapsto f(r(t)) \in \mathbb{R}$ .

Se invece il vincolo è sostegno di una superficie regolare con parametrizzazione  $\sigma$  definita in un insieme di parametri  $K$ , la ricerca degli estremi vincolati di  $f$  si riduce alla ricerca degli estremi della funzione di due variabili  $(u, v) \in K \mapsto f(\sigma(u, v)) \in \mathbb{R}$ .

## Esempio

Determinare gli estremi globali della funzione  $f(x, y, z) = x y z$  sulla porzione della superficie sferica unitaria contenuta nel primo ottante.

Come si identificano i candidati punti di estremo vincolato in mancanza di una parametrizzazione del vincolo? Esaminiamo separatamente i due tipi di vincolo.

## Vincolo di tipo ① “bidimensionale”

Come per le funzioni di due variabili, il punto di partenza è il **teorema della funzione implicita**, che enunciamo in modo informale.

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  insieme aperto,  $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ ,  $Z$  l'insieme degli zeri di  $g$ .

Sia  $(x_0, y_0, z_0) \in Z$  tale che  $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ .

Allora:

esiste un intorno  $W$  di  $(x_0, y_0, z_0)$  tale che l'insieme  $Z \cap W$  è il **grafico** di una funzione reale di **due** variabili reali di classe  $C^1$ , e quindi il **sostegno di una superficie** regolare. **quali?**

Inoltre: **dipende da quale derivata di  $g$  è diversa da 0**

il vettore  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  è **ortogonale** al piano tangente al sostegno della superficie in  $(x_0, y_0, z_0)$ .

In aggiunta alle ipotesi della pagina precedente, sia  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$  e supponiamo che  $f$  abbia in  $(x_0, y_0, z_0)$  un **punto di estremo locale vincolato** su  $Z$ .

Tenendo conto del fatto che “vicino” a  $(x_0, y_0, z_0)$  il vincolo  $Z$  è sostegno di una superficie regolare, si dimostra che il vettore  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  è **ortogonale** al piano tangente al sostegno di tale superficie in  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Da questo si deduce il **teorema dei moltiplicatori di Lagrange** per vincoli bidimensionali in  $\mathbb{R}^3$ :

esiste  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$  è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) & \text{parallelismo tra } \nabla f(x_0, y_0, z_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0, z_0) \\ g(x, y, z) = 0 & \text{appartenenza al vincolo} \end{cases}$$

oppure, equivalentemente, è punto stazionario della funzione lagrangiana  $L : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

## Esempi

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per

- determinare gli estremi globali della funzione  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sul vincolo di equazione  $z^2 - xy - 1 = 0$ ;
- determinare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, avente volume massimo, se l'area della superficie è 12.



Vincolo di tipo ② “unidimensionale”

Enunciamo il **teorema della funzione implicita**.  $\leftarrow$  per funzioni da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  insieme aperto,  $G = (G_1, G_2) \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ ,  $Z$  l'insieme degli zeri di  $G$ .

Sia  $(x_0, y_0, z_0) \in Z$  tale che la matrice jacobiana di  $G$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  ha rango 2.

Allora:

esiste un intorno  $W$  di  $(x_0, y_0, z_0)$  tale che l'insieme  $Z \cap W$  è il grafico di una funzione reale di una variabile reale di classe  $C^1$ , e quindi il sostegno di una curva regolare. Motivazione ...

Inoltre:

$\downarrow$  linearmente indipendenti

il piano individuato dai vettori  $\nabla G_1(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla G_2(x_0, y_0, z_0)$  è ortogonale alla retta tangente alla curva in  $(x_0, y_0, z_0)$ .

In aggiunta alle ipotesi della pagina precedente, sia  $f \in C^1(A, \mathbb{R})$  e supponiamo che  $f$  abbia in  $(x_0, y_0, z_0)$  un **punto di estremo locale vincolato** su  $Z$ .

Il **teorema dei moltiplicatori di Lagrange** per vincoli unidimensionali in  $\mathbb{R}^3$  afferma che:

esistono  $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$  è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla G_1(x, y, z) + \mu \nabla G_2(x, y, z) \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

oppure, equivalentemente, è punto stazionario della funzione lagrangiana  $L : A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) - \lambda G_1(x, y, z) - \mu G_2(x, y, z).$$

### Nota

La prima equazione del sistema esprime il fatto che il vettore  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  giace nel piano individuato dai vettori  $\nabla G_1(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla G_2(x_0, y_0, z_0)$ .

## Esempio

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per determinare gli estremi globali della funzione

$$f(x, y, z) = x + 3y - z$$

sul vincolo definito dalle equazioni

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad 2x + 4y - z = 0.$$

Utilizzare una parametrizzazione del vincolo per verificare il risultato ottenuto.

## APPENDICE

## Dimostrazione del teorema di Fermat

Sia  $\bar{x} \in \text{int}(A)$  di **massimo locale** per  $f$ . dimostrazione analoga per punti di minimo locale

Sia  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tale che  $B_r(\bar{x}) \subset A$  e

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \text{per ogni } x \in B_r(\bar{x}). \quad (1)$$

Fisso  $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Posto  $v := \frac{h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}$  definisco  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$g(t) = f(\bar{x} + t v).$$

ben posta perché  
 $\bar{x} + t v \in B_r(\bar{x})$   
per ogni  $t \in (-r, r)$

Osservo che:

- $g(t) \leq g(0)$  per ogni  $t \in (-r, r)$  per (1)
- $f$  differenziabile in  $\bar{x} \implies f$  derivabile in  $\bar{x}$  nella direzione  $v$   
 $\iff g$  derivabile in  $t = 0$

Applicando il teorema di Fermat per funzioni reali di una variabile reale ottengo  $g'(0) = 0$ .

Siccome


$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = df_{\bar{x}}(v) = df_{\bar{x}}\left(\frac{h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}\right) = \frac{1}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} df_{\bar{x}}(h),$$

ottengo  $df_{\bar{x}}(h) = 0$ .

Noto che  $h$  è un arbitrario elemento di  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; inoltre,  $df_{\bar{x}}(0) = 0$ .

perché  $df_{\bar{x}}$  è lineare  $\uparrow$

Dunque:

$df_{\bar{x}}$  è l'applicazione identicamente nulla, cioè lo zero di  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . 

## Dimostrazione del teorema

Sia  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tale che  $B_r(\bar{x}) \subset A$  e  $f$  è di classe  $C^2$  in  $B_r(\bar{x})$ .

Dato che  $f$  è di classe  $C^2$  posso utilizzare la formula di Taylor di ordine 2 con il resto di Peano.

Per ogni  $x \in B_r(\bar{x})$ :  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  perché  $\bar{x}$  è stazionario

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{x}) (x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|^2),$$

ometto  $\mathbb{R}^n \uparrow$

quindi

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} H_f(\bar{x}) (x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|^2).$$

Sia  $\lambda > 0$  un autovalore di  $H_f(\bar{x})$  e sia  $v \in \mathbb{R}^n$  un autovettore corrispondente.

Esprimo la restrizione di  $f$  alla retta passante per  $\bar{x}$  individuata da  $v$  come  $t \mapsto f(\bar{x} + t v)$ , definita in un intorno di 0.  $\leftarrow$  in modo che  $\bar{x} + t v \in B_r(\bar{x})$

Per ogni  $t$  appartenente a tale intorno:

$$f(\bar{x} + t v) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} H_f(\bar{x}) (t v) \cdot (t v) + o(\|t v\|^2)$$

che equivale a

$$f(\bar{x} + t v) - f(\bar{x}) = \frac{t^2}{2} H_f(\bar{x}) v \cdot v + o(t^2 \|v\|^2)$$

cioè

$$f(\bar{x} + t v) - f(\bar{x}) = \frac{t^2}{2} \lambda v \cdot v + o(t^2)$$

cioè, se  $t \neq 0$ :

$$f(\bar{x} + t v) - f(\bar{x}) = t^2 \left( \frac{\lambda}{2} \|v\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} \right). \quad (*)$$

Per  $t \rightarrow 0$ , la quantità tra parentesi tende a  $\frac{\lambda}{2} \|v\|^2$ , che è strettamente positivo. ← perché  $\lambda > 0$  e  $v \neq 0$



Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno  $I$  di  $t = 0$  tale che

$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : \frac{\lambda}{2} \|v\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} > 0.$$

Da (\*) segue allora

$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : f(\bar{x} + t v) - f(\bar{x}) > 0$$

che equivale a

$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : f(\bar{x} + t v) > f(\bar{x}),$$

quindi  $\bar{x}$  è punto di minimo per la restrizione di  $f$  alla retta passante per  $\bar{x}$  individuata da  $v$ .

Con identico ragionamento si prova che  $\bar{x}$  è punto di massimo se  $\lambda < 0$ .

