a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Calcolo integrale su curve e superfici

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Integrali curvilinei di campi scalari (anche detti: di prima specie)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Sia (γ, r) una curva regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ e r definita in $[a, b]$.

Definiamo integrale di f sulla curva (γ, r) il numero reale

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(r(t))\, \|r'(t)\|\, dt. \qquad (*)$$

$\uparrow$

Per alleggerire la scrittura da qui in poi scriverò sempre $\|\cdot\|$ invece di $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$.

Motivazione e interpretazione geometrica: più avanti

Esempio

Calcolare l'integrale della funzione definita ponendo $f(x, y, z) = x\,y + z$ sulla curva di parametrizzazione $r(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$, $\ t \in [0, 4\pi]$.

A parametrizzazioni distinte di γ corrispondono, in genere, valori distinti dell'integrale curvilineo.   Esempio ...

Fanno eccezione parametrizzazioni di γ "appartenenti alla stessa classe", come di seguito precisato.

Siano $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $s : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni di γ.

Diciamo che r e s sono equivalenti se esiste $h : [c, d] \to [a, b]$ tale che

- h è bigettiva, di classe C^1 e $h'(t) \neq 0$ per ogni t,
- $s = r \circ h$. h : cambiamento di parametro

Osservazione

Ogni cambiamento di parametro è una funzione strettamente monotona; due parametrizzazioni equivalenti inducono sul sostegno

- la stessa orientazione se il cambiamento di parametro è crescente,
- orientazioni opposte se il cambiamento di parametro è decrescente.

Esempi

Si consideri la parametrizzazione "standard" di S^1, cioè

$$r(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Le seguenti parametrizzazioni di S^1 sono equivalenti a r:

$s_1(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big)$	$t \in [0, 1]$	stessa orientazione
$s_2(t) = \big(\cos(t+\pi),\ \sin(t+\pi)\big)$	$t \in [-\pi, \pi]$	stessa orientazione
$s_3(t) = \big(\cos(2\pi - t)), \sin(2\pi - t))\big)$	$t \in [0, 2\pi]$	orientazione opposta

La seguente parametrizzazione di S^1 non è equivalente a r:

$$s_4(t) = \big(\cos t,\ \sin t\big) \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

Proposizione (invarianza dell'integrale di campi scalari per riparam. equivalenti)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\gamma \subset A$.
Se $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $s : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ sono parametrizzazioni equivalenti di γ, allora:

$$\int_c^d f(s(t))\, \|s'(t)\|\, dt = \int_a^b f(r(t))\, \|r'(t)\|\, dt.$$

▸ Verifica...

Osservazione (importante!)

Supponiamo che γ ammetta una parametrizzazione r (quasi) regolare, semplice, **non chiusa**; si può dimostrare che tutte le sue parametrizzazioni (quasi) regolari, semplici, non chiuse sono equivalenti a r (e quindi tra loro).

Conseguenza: per calcolare l'integrale di un campo scalare su γ si può utilizzare una qualsiasi parametrizzazione (quasi) regolare, semplice, non chiusa.

E per curve chiuse? Regolari a tratti? Non semplici?

Concatenamento di curve

Siano (γ_1, r_1) e (γ_2, r_2) due curve in $\mathbb{R}^n$ con intervalli dei parametri $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$, rispettivamente, tali che $r_1(b_1) = r_2(a_2)$.

Riparametrizziamo i sostegni γ_1 e γ_2, mantenendo gli stessi versi di percorrenza, definendo

$$\widetilde{r}_1(t) := r_1\big(a_1 + t(b_1 - a_1)\big) \qquad t \in [0,1]$$

$$\widetilde{r}_2(t) := r_2\big(a_2 + (t-1)(b_2 - a_2)\big) \qquad t \in [1,2].$$

Nota: $\widetilde{r}_1(1) = \widetilde{r}_2(1)$

La funzione $r : [0,2] \to \mathbb{R}^n$ definita ponendo

$$r(t) = \begin{cases} \widetilde{r}_1(t) & t \in [0,1] \\ \widetilde{r}_2(t) & t \in (1,2] \end{cases}$$

è continua e la sua immagine è $\gamma_1 \cup \gamma_2 =: \gamma$.

Pertanto:

curve componenti

(γ, r) è una curva, detta concatenamento delle curve (γ_1, r_1) e (γ_2, r_2).

In modo analogo si può definire il concatenamento di un qualsiasi numero finito di curve.

Nota: nella definizione di concatenamento abbiamo riparametrizzato le curve componenti in intervalli adiacenti, allo scopo di ottenere una funzione definita e continua in un singolo intervallo, avente per immagine l'unione dei sostegni; nella pratica non serve riparametrizzare.

per esempio, nel calcolo degli integrali curvilinei

Proprietà

- Il concatenamento di curve regolari o quasi regolari è in genere una curva regolare a tratti.
- Il concatenamento non è in genere una curva semplice, nemmeno se ciascuna delle curve componenti lo è.
- Qualsiasi curva regolare (a tratti) semplice è il "naturale" concatenamento di curve (quasi) regolari, semplici, non chiuse. Esempi ...

Osservazione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\gamma \subset A$.

Supponiamo che γ sia sostegno del concatenamento di un numero finito di curve regolari semplici (non chiuse), con sostegni $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$.

Risulta

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \ldots + \int_{\gamma_k} f\, ds$$

Per l'osservazione di pagina 4, l'integrale su ciascuna curva componente può essere calcolato utilizzando una sua qualsiasi parametrizzazione.

Conseguenza:
per assegnare l'integrale curvilineo di un campo scalare è sufficiente prescrivere il sostegno γ, purché si convenga di utilizzare per ciascuna sua componente soltanto parametrizzazioni semplici.
Altrimenti, occorre esplicitare la parametrizzazione, oppure descrivere il sostegno mediante espressioni come "circonferenza percorsa due volte", "segmento percorso tre volte", ...

Esempi

- Calcolare l'integrale della funzione definita ponendo $f(x,y) = e^{x+y}$ sulla poligonale di vertici $(1,1),(0,0),(2,0)$.
- Calcolare l'integrale della funzione definita ponendo $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

Sia (γ, r) una curva regolare (a tratti) in $\mathbb{R}^n$, con r definita in $[a, b]$.

Chiamiamo lunghezza della curva il numero reale

$$L(\gamma, r) := \int_a^b \|r'(t)\| \, dt \,. \qquad \leftarrow \text{integrale sulla curva della funzione } f \equiv 1$$

Nota: per quanto detto per gli integrali curvilinei, a parametrizzazioni distinte di γ corrispondono, in genere, lunghezze distinte della curva. Tuttavia, se si conviene di utilizzare solo parametrizzazioni semplici si può parlare di lunghezza del sostegno γ e utilizzare il simbolo $L(\gamma)$.

Osservazione (ascissa curvilinea)

Ogni curva regolare di lunghezza L ammette una riparametrizzazione equivalente $\widetilde{r}$, definita in $[0, L]$, tale che $\|\widetilde{r}'(t)\| = 1$ per ogni $t \in [0, L]$.

Cambiamento di parametro: funzione inversa di $t \in [a, b] \mapsto \displaystyle\int_a^t \|r'(\tau)\| \, d\tau$

Esempi

- Calcolare la lunghezza delle curve definite dalle seguenti parametrizzazioni:

$$r(t) = (\cos t,\ \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\ /\ t \in [0, 3\pi]$$

$$r(t) = (t + \sin t,\ \cos t), \quad t \in [0, \pi]$$

$$r(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 3\,t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Calcolare la lunghezza della curva ottenuta concatenando la curva di parametrizzazione

$$r(t) = (3\cos t,\ 3\sin t),\ \ t \in [0, \pi],$$

e la curva grafico associata alla funzione

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{9},\ \ x \in [-3, 3].$$

Integrali curvilinei di campi vettoriali (anche: di seconda specie)

$\uparrow$ non è quello che ci si potrebbe aspettare

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo.

Sia (γ, r) una curva regolare (a tratti) con $\gamma \subset A$ e r definita in $[a, b]$.

Definiamo integrale del campo vettoriale F sulla curva (γ, r) il numero reale

$$\int_\gamma F(P) \cdot dP := \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt.$$

Interpretazione
... più avanti

Se la curva è chiusa l'integrale si denota con il simbolo $\oint_\gamma F(P) \cdot dP$ e si chiama circuitazione.

Esempi

Calcolare l'integrale del campo vettoriale $F(x, y) = (y,\ x\, y)$

- sulla curva parametrizzata da $r(t) = (\cos t,\ \sin t),\ \ t \in [0, \pi/2]$,
- sulla curva grafico associata alla funzione $f(x) = 1 - x,\ \ x \in [0, 1]$.

Osservazione (invarianza per riparam. equival. che conservano l'orientazione)

Siano $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $s : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni equivalenti di γ, con $s = r \circ h$. Allora:

$$\int_c^d F(s(t)) \cdot s'(t)\, dt = \int_c^d \Big(F(r(h(t))) \cdot r'(h(t)) \Big)\, h'(t)\, dt \qquad \tau := h(t)$$

$$= \begin{cases} h' > 0 \ \nearrow \ \displaystyle\int_a^b F(r(\tau)) \cdot r'(\tau)\, d\tau \\[2ex] h' < 0 \ \searrow \ \displaystyle\int_b^a F(r(\tau)) \cdot r'(\tau)\, d\tau = -\int_a^b F(r(\tau)) \cdot r'(\tau)\, d\tau \end{cases}$$

Quindi, l'integrale di F rispetto a due parametrizzazioni equivalenti

- è lo stesso se le parametrizzazioni inducono sul sostegno la medesima orientazione,
- differisce per il segno se le parametrizzazioni inducono sul sostegno orientazioni opposte.

In virtù della precedente osservazione, valgono considerazioni simili a quelle relative a integrali curvilinei di campi scalari.

- Se ci si limita a parametrizzazioni (quasi) regolari, semplici, non chiuse, si può prescrivere l'integrale curvilineo di un campo vettoriale F assegnando solamente il sostegno **con fissato verso di percorrenza**.

- Su una curva regolare (a tratti) ottenuta come concatenamento di un numero finito di curve (quasi) regolari, semplici, non chiuse, l'integrale di F è la somma degli integrali di F sulle curve componenti; ciascuno di questi integrali può essere calcolato utilizzando una qualsiasi parametrizzazione, con l'avvertenza di invertirne il segno se il verso di percorrenza indotto dalla parametrizzazione scelta non è coerente con il verso di percorrenza assegnato sul concatenamento.

- Nel caso generale occorre esplicitare la parametrizzazione, oppure descrivere il sostegno mediante espressioni come "circonferenza percorsa due volte in senso antiorario".

Esempi

- Calcolare l'integrale del campo vettoriale definito ponendo
$$F(x,y) = (e^{x+y},\ x^2)$$
sulla poligonale di vertici $(1,1), (0,0), (2,0)$.

- Calcolare l'integrale del campo vettoriale definito ponendo
$$F(x,y) = (y^2,\ x^3)$$
sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

Relazione tra integrali curvilinei di campi scalari e di campi vettoriali

Premessa: se r e $\widetilde{r}$ sono due parametrizzazioni equivalenti di uno stesso insieme γ, con $\widetilde{r} = r \circ h$, risulta:

$$\widetilde{T}(t) \overset{\text{DEF}}{=} \frac{\widetilde{r}'(t)}{\|\widetilde{r}'(t)\|} = \frac{r'(h(t))\, h'(t)}{\|r'(h(t))\, h'(t)\|} = \frac{h'(t)}{|h'(t)|}\, \frac{r'(h(t))}{\|r'(h(t))\|} \overset{\text{DEF}}{=} \operatorname{sign}(h'(t))\, T(h(t)),$$

pertanto in ciascun punto di γ i versori tangenti rispetto alle due parametrizzazioni sono uguali se $h' > 0$, opposti se $h' < 0$.

stessa orientazione $\uparrow$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$ orientazione opposta

Se γ ammette una parametrizzazione (quasi) regolare, semplice, non chiusa, e fissiamo su γ un verso di percorrenza, possiamo definire il campo vettoriale tangente a γ ponendo

$$T(P) := \frac{r'(r^{-1}(P))}{\|r'(r^{-1}(P))\|} \quad \text{per ogni } P \in \gamma \quad \leftarrow$$ con la sola possibile eccezione degli estremi

con r arbitraria parametrizzazione di γ coerente con il verso fissato.

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo.

Sia $\gamma \subset A$ sostegno di una curva regolare (a tratti) semplice.

concatenamento di curve (quasi) regolari, semplici, non chiuse

Fissato su γ un verso di percorrenza, con la possibile eccezione di un numero finito di punti, in γ è definito il campo vettoriale tangente T, e dunque anche il campo scalare $F \cdot T$.

Risulta:

arbitraria parametrizzazione di γ coerente con il verso fissato

$$\int_\gamma F \cdot T\, ds := \int_a^b \Big(F(r(t)) \cdot T(r(t)) \Big) \|r'(t)\|\, dt$$

integrale di campo scalare

$$= \int_a^b \left(F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \right) \|r'(t)\|\, dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$\updownarrow$

lavoro compiuto dalla forza...

$$=: \int_\gamma F(P) \cdot dP$$

$\leftarrow$ integrale di campo vettoriale

Campi vettoriali conservativi

Premessa

anche: chiusura di un aperto

Sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto.

La funzione gradiente di f è un campo vettoriale continuo in A, che chiameremo campo gradiente di f.

Per esempio: il campo gradiente della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

è il campo vettoriale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ di componenti

$$F_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad F_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

È naturale chiedersi se ogni campo vettoriale sia il campo gradiente di qualche funzione; come vedremo, la risposta è negativa.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e sia F un campo vettoriale continuo in A.

Se esiste $f \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che

$$\nabla f = F,$$

diciamo che F è conservativo (anche: esatto in A) e che f è un potenziale di F in A.

articolo indeterminativo? $\uparrow$

Nota

In base alla definizione data, "conservativo" è sinonimo di "ammette un potenziale".

Esempio

La funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ è un potenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \ \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

ecco perché si dice "un" potenziale
$\downarrow$

Osservazione

- Se f è potenziale di F in A e $c \in \mathbb{R}$, allora $f + c$ è potenziale di F in A.
- Se A è connesso e se f e g sono entrambi potenziali di F in A, allora: esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$. $\leftarrow$ caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo

Osservazione

Denotate con $F_1, \ldots, F_n$ le componenti di F, dire che f è potenziale di F in A equivale a dire che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Esempio

Determinare un potenziale del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(e^y + 2\,x\,z,\ x\,e^y - \frac{1}{y-2},\ x^2 + z \right).$$

Teorema (FFCI per campi vettoriali)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e sia F campo vettoriale continuo in A.

Supponiamo che F sia conservativo e denotiamo con f un suo potenziale.

Sia (γ, r) una curva regolare (a tratti) con sostegno contenuto in A, con intervallo dei parametri $[a, b]$.

Allora:

$$\int_\gamma F(P) \cdot dP \;=\; f(r(b)) \underset{\uparrow}{-} f(r(a)).$$

1. dipende solo dagli estremi della curva
2. se gli estremi coincidono è uguale a 0

Verifica :

$$\int_\gamma F(P) \cdot dP \;=\; \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (f \circ r)'(t)\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FFCI AM I}}}{=} (f \circ r)(b) - (f \circ r)(a) \qquad \square$$

Esempi

1. Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\Big),$$

sulle curve definite dalle parametrizzazioni

- $r(t) = (\cos t,\ 2\sin t),\ \ t \in [0, \pi/2]$
- $r(t) = (\cos t,\ 2\sin t),\ \ t \in [0, 2\pi]$

2. Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \Big(e^y + 2\,x\,z,\ x\,e^y - \frac{1}{y-2},\ x^2 + z\Big)$$

sulle curve definite dalle parametrizzazioni

- $r(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t),\ \ t \in [0, 2\pi]$
- $r(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \cos^3 t),\ \ t \in [0, 2\pi]$

Osservazione (caratterizzazioni dei campi vettoriali conservativi)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e sia F un campo vettoriale continuo in A.

Consideriamo le tre affermazioni seguenti:

(a) F ammette un potenziale;

(b) comunque si scelgano due curve regolari (a tratti), con sostegni γ_1 e γ_2 contenuti in A, aventi i medesimi estremi, risulta

$$\int_{\gamma_1} F(P) \cdot dP = \int_{\gamma_2} F(P) \cdot dP;$$

(c) per qualsiasi (γ, r) curva chiusa regolare (a tratti), con sostegno contenuto in A, risulta

$$\oint_{\gamma} F(P) \cdot dP = 0.$$

Dalle note 1 e 2 alla FCCI seguono "(a) $\Rightarrow$ (b)" e "(a) $\Rightarrow$ (c)".

Se l'insieme A è connesso valgono anche le implicazioni contrarie, quindi le tre affermazioni sono equivalenti. Motivazione . . .

Conseguenza (criteri per stabilire che un campo vettoriale non è conservativo)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e sia F campo vettoriale continuo in A.

Se esistono

- due curve regolari (a tratti), con sostegni contenuti in A, aventi i medesimi estremi, sulle quali F ha integrali diversi,

oppure

- una curva chiusa regolare (a tratti), con sostegno contenuto in A, sulla quale l'integrale di F è diverso da 0,

allora: F non è conservativo.

Esempio

Il campo vettoriale $F(x, y) = (y,\ x\, y)$ non è conservativo.

Tenere presente l'esempio di pagina 11

In base a quanto detto fino a ora:

$\downarrow$ cioè: ammette un potenziale

- per stabilire che un campo vettoriale è conservativo, occorre determinarne esplicitamente un potenziale oppure, in un aperto connesso, valutare infiniti integrali curvilinei; $\leftarrow$ impossibile in pratica!
- per stabilire che un campo vettoriale non è conservativo, occorre valutare uno o più integrali curvilinei.

Per i campi vettoriali di classe C^1 si può procedere in modo alternativo. Premettiamo una definizione.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Sia F un campo vettoriale di classe C^1 in A, di componenti $F_1, \ldots, F_n$.

Diciamo che F è chiuso in A se per ogni $x \in A$ si ha

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (i \neq j)$$

Esempio: il campo vettoriale $F(x, y) = (y,\ x\,y)$ non è chiuso.

Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto e F campo vettoriale di classe C^1 in A.

1. Se F è conservativo in A, allora F è chiuso in A. *Verifica ...*
2. Se F è chiuso in A e l'insieme A è stellato, allora F è conservativo in A.

   Dimostrazione di tipo costruttivo:
   se A è stellato rispetto a x_0, ha senso definire l'applicazione che a $x \in A$ associa l'integrale di F sul segmento $[x_0, x]$; tale funzione risulta essere un potenziale di F.

Il punto 2 è noto come teorema di Poincaré.

Osservazione

Senza ipotesi aggiuntive su A, non tutti i campi vettoriali chiusi sono conservativi. Esempio:

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

chiuso in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
circuitazione su S^1 diversa da 0

Esempi

- Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{y}{1 + x\,y} + z,\ \frac{x}{1 + x\,y},\ x \right)$$

  è conservativo nell'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + x\,y > 0\}$.

- Stabilire se il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{1 + y}{1 + x},\ \ln(1 + x) \right)$$

  è conservativo nel proprio insieme di definizione.

  Calcolare l'integrale di F sul segmento congiungente $(0, 0)$ e $(2, 1)$.

Esempio (quando tutto sembra andare male, e invece ...)

Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \; \frac{x+y}{x^2+y^2} \right) ,$$

- stabilire se F è chiuso e se è conservativo nel proprio insieme di definizione;
- calcolare l'integrale di F sulla curva semplice di estremi $(0,1)$ e $(1,0)$ con sostegno contenuto nell'insieme

$$\{(x,y) \mid x\,y + x + y = 1\}.$$

Integrali di superficie di campi scalari (anche detti: di prima specie)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Sia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie regolare con $\boldsymbol{\Sigma} \subset A$ e $\boldsymbol{\sigma}$ definita in un insieme normale K.

Definiamo integrale di f sulla superficie $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ il numero reale

$$\int_{\boldsymbol{\Sigma}} f \, dS := \iint_K f(\boldsymbol{\sigma}(u, v)) \, \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u, v)\| \, du \, dv.$$

Esempi

Calcolare l'integrale della funzione proiezione sull'asse z sulle superfici di parametrizzazione

- $\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u \cos v, \ u \sin v, \ u) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$
- $\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u \cos v, \ u \sin v, \ v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$

Sugli integrali di superficie di campi scalari possiamo fare considerazioni simili a quelle fatte per gli integrali curvilinei.

$\uparrow$ ma più rapide perché le superfici sono tutte "semplici"

Iniziamo con la nozione di "equivalenza" per superfici.

Sia $\boldsymbol{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ e siano $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ due parametrizzazioni di $\boldsymbol{\Sigma}$, rispettivamente definite negli insiemi di parametri K e $\widetilde{K}$.

Diciamo che $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sono parametrizzazioni equivalenti di $\boldsymbol{\Sigma}$ se esiste $h : \widetilde{K} \to K$ tale che

- h è bigettiva,
- h è di classe C^1 nell'interiore di $\widetilde{K}$,
- $\det(\mathrm{J}_h(u, v)) \neq 0$ per ogni $(u, v) \in \mathrm{int}(\widetilde{K})$,
- $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$.

h : cambiamento di parametro

Esempio

Sia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie con insieme di parametri K.

Posto $\widetilde{K} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (v,u) \in K\}$, definiamo $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{K} \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(u,v) := \boldsymbol{\sigma}(v,u).$$

Allora: $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ è una parametrizzazione di $\boldsymbol{\Sigma}$ equivalente a $\boldsymbol{\sigma}$.

$$h(u,v) = (v,u) \implies \mathrm{J}_h(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det\bigl(\mathrm{J}_h(u,v) \equiv -1$$

Osservazione

Se h è un cambiamento di parametro, la funzione

$$(u,v) \in \operatorname{int}(\widetilde{K}) \mapsto \det\bigl(\mathrm{J}_h(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}$$

è continua in un insieme connesso e non è mai uguale a 0; per il teorema dei valori intermedi, ha segno costante.

Osservazione

Con le notazioni della definizione di parametrizzazioni equivalenti, per ogni $(u, v) \in \operatorname{int}(\widetilde{K})$ si ha:

$$N_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u, v) = \det(\mathrm{J}_h(u, v))\, N_{\boldsymbol{\sigma}}(h(u, v))$$

▸ verifica. . .

$$n_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u, v) = \operatorname{sign}(\det(\mathrm{J}_h(u, v)))\, n_{\boldsymbol{\sigma}}(h(u, v)).$$

Pertanto:

i campi vettoriali normali delle superfici $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ e $(\boldsymbol{\Sigma}, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}})$ sono

- uguali se il determinante della matrice jacobiana di h è positivo,
- opposti se il determinante della matrice jacobiana di h è negativo.

Nota: nell'esempio della pagina precedente sono opposti.

Proposizione (invarianza dell'integrale di campi scalari per riparam. equivalenti)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\boldsymbol{\Sigma} \subset A$.

Se $\boldsymbol{\sigma} : K \to \mathbb{R}^3$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{K} \to \mathbb{R}^3$ sono parametrizzazioni equivalenti di $\boldsymbol{\Sigma}$, allora:

$$\iint_{\widetilde{K}} f(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(u,v))\,\|N_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u,v)\|\,du\,dv = \iint_K f(\boldsymbol{\sigma}(u,v))\,\|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v)\|\,du\,dv.$$

Verifica . . .

Osservazione $\leftarrow$ corrisponde all'equivalenza tra curve regolari, semplici, non chiuse aventi lo stesso sostegno

Si può dimostrare che se due superfici regolari con bordo hanno lo stesso sostegno, allora le corrispondenti parametrizzazioni sono equivalenti.

Conseguenza: se ci si limita alle superfici regolari con bordo, l'integrale di superficie del campo scalare f non dipende dalla parametrizzazione scelta e può essere prescritto assegnando soltanto l'insieme $\boldsymbol{\Sigma}$.

Se $\mathbf{\Sigma}$ è sostegno di una superficie regolare a pezzi, con facce $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_m$, definiamo

$$\int_{\mathbf{\Sigma}} f\,dS := \int_{\mathbf{\Sigma}_1} f\,dS + \ldots + \int_{\mathbf{\Sigma}_m} f\,dS.$$

Osservazioni

- L'integrale su ciascuna faccia può essere calcolato utilizzando una sua qualsiasi parametrizzazione.
- Tra le superfici regolari a pezzi includiamo superfici che sono regolari ma non regolari con bordo. superficie cilindrica, superficie sferica, ...

Esempio

Calcolare l'integrale della funzione proiezione sull'asse z sulla frontiera dell'insieme

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\,,\ 0 \leq z \leq 4\Big\}.$$

Sia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie regolare, avente per insieme dei parametri un insieme normale K.

Chiamiamo area della superficie il numero reale

$$A(\boldsymbol{\Sigma}) := \iint_K \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u, v)\| \, du \, dv \, . \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l}\text{integrale di superficie} \\ \text{della funzione } f \equiv 1\end{array}$$

Nota: l'area di una superficie regolare a pezzi è la somma delle aree delle singole facce.

Esempi

- Calcolare l'area della superficie sferica di raggio r.
- Calcolare l'area della frontiera dell'insieme

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\right\}.$$

Esercizio

Calcolare l'area della superficie grafico associata alla funzione definita ponendo $f(x,y) = x^2 + y^2$ nella palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^2$.

Per ragioni di tempo le superfici di rotazione non vengono presentate in aula

Osservazione (area delle superfici di rotazione)

Sia $\gamma \subset \{(0,y,z) \mid y \geq 0\}$ il sostegno di una curva semplice e regolare, parametrizzata da $r(t) = (0,\ y(t),\ z(t))$, con $t \in [a,b]$.

Sia $\boldsymbol{\Sigma}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando γ attorno all'asse z.

Risulta:

$$A(\boldsymbol{\Sigma}) = 2\pi \int_a^b y(t)\, \|r'(t)\|\, dt \;\left(= 2\pi \int_\gamma \pi_y \, ds \right)$$

Esempio

Calcolare l'area della superficie (toro) ottenuta ruotando attorno all'asse z una circonferenza, contenuta nel piano $y\,z$, con centro posto sull'asse y a distanza dall'origine maggiore del raggio.

In sospeso:

Interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo di campi scalari

Sia $\gamma \subset A \subseteq \mathbb{R}^2$ il sostegno di una curva regolare semplice.

Sia $f \in C(A, \mathbb{R})$ tale che $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \gamma$.

Allora:

l'integrale curvilineo di f su γ è uguale all'area della porzione di superficie cilindrica di direttrice γ e generatrici parallele all'asse z compresa tra il piano di equazione $z = 0$ e il grafico di f.

Verifica ...

Flusso attraverso una superficie (anche detto: integrale di superficie di seconda specie)

Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo.

Sia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie regolare con $\boldsymbol{\Sigma} \subset A$ e $\boldsymbol{\sigma}$ definita in un insieme normale K.

Supponiamo che la superficie sia orientabile e denotiamo con n il campo vettoriale normale.

$\uparrow$ cioè: n è definito e continuo in $\boldsymbol{\Sigma}$

Definiamo flusso di F attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ il numero reale

$$\Phi_{\boldsymbol{\Sigma}}(F) := \int_{\boldsymbol{\Sigma}} F \cdot n \, dS.$$

$\leftarrow$ integrale di prima specie del campo scalare $F \cdot n$

Nota

Il campo scalare $F \cdot n$ fornisce in ogni punto di $\boldsymbol{\Sigma}$ la componente di F nella direzione di n, ossia nella direzione normale a $\boldsymbol{\Sigma}$.

Quando è massimo (in valore assoluto)? Quando è uguale a 0?

Esplicitiamo la definizione:

$$\Phi_{\boldsymbol{\Sigma}}(F) := \int_{\boldsymbol{\Sigma}} F \cdot n \, dS \; = \iint_K F(\boldsymbol{\sigma}(u,v)) \cdot n(\boldsymbol{\sigma}(u,v)) \, \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v)\| \, du \, dv$$

$$\overset{\text{def. di campo vett. normale } \downarrow}{=} \iint_K F(\boldsymbol{\sigma}(u,v)) \cdot n_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v) \; \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v)\| \, du \, dv$$

$$\overset{\text{def. di versore normale } \downarrow}{=} \iint_K F(\boldsymbol{\sigma}(u,v)) \cdot N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v) \, du \, dv$$

Osservazione (invarianza per riparam. equival. che conservano l'orientazione)

Calcolando il flusso di F attraverso $\boldsymbol{\Sigma}$ mediante due parametrizzazioni equivalenti $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$, ottenute mediante il cambiamento di parametro h, si ottiene

- il medesimo risultato se i campi vettoriali normali di $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sono uguali (ossia $\det(\mathrm{J}_h) > 0$),
- risultati opposti se i campi vettoriali normali di $\boldsymbol{\sigma}$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ sono opposti (ossia $\det(J_{\boldsymbol{h}}) > 0$).

Motivazione: basta pensare ai campi vettoriali normali ...

Conseguenza:
se si prescrive il calcolo del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientabile assegnando solo il sostegno della superficie, è necessario specificare l'orientazione desiderata.

Esempi

- Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, z)$$

attraverso la superficie di parametrizzazione

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ v) \qquad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

- Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

uscente dalla sfera di centro l'origine e raggio 2 attraverso la calotta posta al di sopra del piano di equazione $z = 1$.

- Calcolare il flusso diretto verso il basso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y, x, z)$$

attraverso la superficie associata al grafico della funzione definita nella palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Relazione tra integrali di superficie e integrali curvilinei

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ con $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Il campo vettoriale

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

si chiama rotore (o rotazionale; in inglese, curl) del campo vettoriale F; è definito e continuo in A.

Nota: possiamo determinare il rotore di F mediante il determinante simbolico qui a lato; se interpretiamo gli elementi sulla seconda riga come le componenti del vettore (simbolico) $\boldsymbol{\nabla}$, otteniamo $\operatorname{rot} F = \boldsymbol{\nabla} \times F$.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Esempi

Determinare il rotore dei seguenti campi vettoriali: perché “rotore”?

$F(x, y, z) = (x\,y,\ x^2,\ y\,z)$ $\quad$ $F(x, y, z) = (x, y, z)$ $\quad$ $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$

Nota (sulla terminologia dei campi vettoriali)

Se $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, dire che F è chiuso in A equivale a dire che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} \equiv \frac{\partial F_3}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} \equiv \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

cioè

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \equiv 0\,, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \equiv 0\,,$$

cioè $\operatorname{rot} F \equiv 0$.

assumendo $F_3 \equiv 0$ $\downarrow$

Per questa ragione i campi vettoriali chiusi in $\mathbb{R}^3$ (e anche in $\mathbb{R}^2$) sono detti irrotazionali. “Tradurre” il teorema di Poincarè ...

Teorema di Stokes (o del rotore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$.

Sia $\mathbf{\Sigma} \subset A$ il sostegno di una superficie regolare con bordo con campo vettoriale normale n.

↑ quindi orientabile

Allora:

$$\Phi_{\mathbf{\Sigma}}(\mathrm{rot}\, F) = \oint_{\partial \mathbf{\Sigma}^+} F(P) \cdot dP$$

integrale di superficie

circuitazione di F sul bordo di $\mathbf{\Sigma}$ orientato positivamente

Esempio

Verificare la validità del teorema di Stokes per il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x\, y,\ x^2,\ y\, z)$$

che attraversa verso l'alto la porzione della superficie sferica unitaria contenuta nel semispazio superiore.

Osservazione

- Supponiamo che un campo vettoriale G sia "di tipo rotore", cioè G sia il rotore di un altro campo vettoriale F. $\leftarrow$ "potenziale vettore"

  Per il teorema di Stokes, il flusso di G attraverso una superficie $\boldsymbol{\Sigma}$ regolare con bordo dipende solo dai valori di F sul bordo $\partial\boldsymbol{\Sigma}$.

  Pertanto:

  nel calcolo del flusso di un campo vettoriale "di tipo rotore" possiamo sostituire la superficie data con qualsiasi altra superficie regolare avente il medesimo bordo, orientato allo stesso modo. Esempio ...

- Inoltre: il flusso di un campo vettoriale "di tipo rotore" attraverso una qualsiasi superficie regolare orientabile **chiusa** è uguale a 0.

Nota: questi risultati sono analoghi a quelli sugli integrali curvilinei di campi vettoriali "di tipo gradiente" (ossia conservativi).

Relazione tra integrali di superficie e integrali tripli

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$.

La funzione

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

si chiama divergenza del campo vettoriale F; è definita e continua in A.

Nota: interpretando i simboli di derivate parziali come componenti del vettore (simbolico) $\boldsymbol{\nabla}$, otteniamo $\operatorname{div} F = \boldsymbol{\nabla} \cdot F$.

Nota: se $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, allora: $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$.

Esempi

Determinare la divergenza dei seguenti campi vettoriali:

$F(x, y, z) = (x\,y,\ x^2,\ y\,z)$ $\quad$ $F(x, y, z) = (x, y, z)$ $\quad$ $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$

Teorema di Gauss (o della divergenza) in $\mathbb{R}^3$ $\leftarrow$ vale anche in $\mathbb{R}^2$

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare normale, cioè un dominio regolare che è anche un insieme normale. Sia $F \in C^1(T, \mathbb{R}^3)$.

Allora:

$$\underbrace{\iiint_T \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}_{\text{integrale triplo}} = \underbrace{\int_{\partial T^+} F \cdot n\, dS}_{\text{flusso di } F \text{ uscente attraverso la frontiera di } T}.$$

Esempio

Verificare la validità del teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x\,y^2,\; x^2\,y,\; (x^2+y^2)\,z^2)$$

e l'insieme

$$T = \Big\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 4\,,\; 0 \le z \le 1\Big\}.$$

Esercizio

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

uscente dall'insieme

$$\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

attraverso la sua superficie laterale. $\leftarrow$ superficie non chiusa ???

Relazione tra integrali curvilinei e integrali doppi

Premessa

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare normale. $\leftarrow$ stesso significato che in $\mathbb{R}^3$

Sulla frontiera ∂D, con la possibile eccezione di un numero finito di punti. possiamo definire il campo vettoriale normale ponendo

$$n(P) := \left(\frac{y'(r^{-1}(P))}{\|r'(r^{-1}(P))\|},\ -\frac{x'(r^{-1}(P))}{\|r'((r^{-1}(P))\|} \right),$$

dove $r(t) = \big(x(t),\ y(t)\big)$, $t \in \mathrm{I}$, è una arbitraria parametrizzazione della componente di ∂D contenente P.

Ricordiamo che dire che ∂D è orientatata positivamente equivale a dire che il campo vettoriale normale punta verso l'esterno di D.

Enunciamo il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$:

Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare normale e $F \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$.

Allora:

$$\iint_D \operatorname{div} F(x,y)\, dx\, dy \;=\; \int_{\partial D^+} F \cdot n \; ds.$$

integrale doppio — "flusso" di F uscente attraverso la frontiera di D

Corollario (teorema di Gauss-Green)

Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (normale) e $F = (F_1, F_2) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$.

Allora:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy \;=\; \oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP.$$

integrale doppio — circuitazione del campo vettoriale F sulla frontiera di D orientata positivamente

Verifica: applicare il teorema della divergenza a $G := (F_2, -F_1)$

Esercizio

Verificare la validità del teorema di Gauss-Green per il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x + y^2,\ x^2 + y)$$

e l'insieme

$$D = \Big\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

Applicazioni del teorema di Gauss-Green

1. Calcolo della misura di un dominio regolare

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (normale). Risulta:

$$m_2(D) = \oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP$$

con $F = (F_1, F_2)$ arbitrario campo vettoriale tale che $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 1$ in D.

Possibili scelte:

$$F(x, y) = (0,\, x), \qquad F(x, y) = (-y,\, 0), \qquad F(x, y) = \left(-\frac{y}{2},\, \frac{x}{2}\right)$$

Esempio

Calcolare la misura della regione di piano racchiusa dall'asteroide, cioè il sostegno della curva parametrizzata da

$$r(t) = \left(\cos^3(t),\ \sin^3(t)\right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2 Estensione del teorema di Poincaré

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto connesso.

Diciamo che A è semplicemente connesso se se ogni insieme γ contenuto in A, che sia sostegno di una curva regolare (a tratti), semplice e chiusa, è frontiera di un dominio regolare D contenuto in A.

Esempi ... Formulazione alternativa informale, valida in dimensione qualsiasi ...

Teorema $\leftarrow$ vale anche in dimensione qualsiasi

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto semplicemente connesso.
Allora: ogni campo vettoriale di classe C^1 e chiuso in A è conservativo.

Dimostrazione ...

Nota

esempio? $\downarrow$

Ogni sottoinsieme stellato è semplicemente connesso; il viceversa non vale.

Quindi: il teorema qui sopra estende il teorema di Poincaré.

APPENDICE

Verifica: invarianza per riparametrizzazioni equivalenti – curve

Siano $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $s : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ due parametrizzazioni equivalenti di γ, con $s = r \circ h$. (Senza perdere generalità, suppongo r e s regolari.)

Per ogni $t \in [c,d]$ si ha $s'(t) = r'(h(t))\, h'(t)$, quindi:

$$\int_c^d f(s(t))\,\|s'(t)\|\,dt = \int_c^d f(r(h(t)))\,\|r'(h(t))\|\,|h'(t)|\,dt$$

$$= \begin{cases} \overset{h'>0\ \nearrow}{} \displaystyle\int_c^d f(r(h(t)))\,\|r'(h(t))\|\,h'(t)\,dt \\ \overset{h'<0\ \searrow}{} \displaystyle\int_c^d f(r(h(t)))\,\|r'(h(t))\|\,(-h'(t))\,dt = \int_d^c f(r(h(t)))\,\|r'(h(t))\|\,h'(t)\,dt \end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \tau := h(t)}}{=} \int_a^b f(r(\tau))\,\|r'(\tau)\|\,d\tau$$

$\square$

Verifica della formula per i campi vettoriali normali

Se $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$, per ogni $(u, v) \in \operatorname{int}(\widetilde{K})$ si ha

$$\mathrm{J}_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u, v) = \mathrm{J}_{\boldsymbol{\sigma}}(h(u, v))\, \mathrm{J}_h(u, v)$$

Esplicito, usando il simbolo D_i per indicare la derivata rispetto alla i-esima variabile e omettendo gli argomenti per alleggerire la scrittura:

$$\begin{pmatrix} D_1\widetilde{\sigma}_1 & D_2\widetilde{\sigma}_1 \\ D_1\widetilde{\sigma}_2 & D_2\widetilde{\sigma}_2 \\ D_1\widetilde{\sigma}_3 & D_2\widetilde{\sigma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\sigma_1 & D_2\sigma_1 \\ D_1\sigma_2 & D_2\sigma_2 \\ D_1\sigma_3 & D_2\sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 h_1 & D_2 h_1 \\ D_1 h_2 & D_2 h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1\sigma_1\, D_1 h_1 + D_2\sigma_1\, D_1 h_2 & D_1\sigma_1\, D_2 h_1 + D_2\sigma_1\, D_2 h_2 \\ D_1\sigma_2\, D_1 h_1 + D_2\sigma_2\, D_1 h_2 & D_1\sigma_2\, D_2 h_1 + D_2\sigma_2\, D_2 h_2 \\ D_1\sigma_3\, D_1 h_1 + D_2\sigma_3\, D_1 h_2 & D_1\sigma_3\, D_2 h_1 + D_2\sigma_3\, D_2 h_2 \end{pmatrix}$$

Uguaglio le colonne:

$$D_1\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = D_1 h_1\, D_1\boldsymbol{\sigma} + D_1 h_2\, D_2\boldsymbol{\sigma}, \qquad D_2\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = D_2 h_1\, D_1\boldsymbol{\sigma} + D_2 h_2\, D_2\boldsymbol{\sigma}$$

Calcolo il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}
N_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}} &:= D_1\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \times D_2\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \\
&= \left(D_1 h_1\, D_1\boldsymbol{\sigma} + D_1 h_2\, D_2\boldsymbol{\sigma}\right) \times \left(D_2 h_1\, D_1\boldsymbol{\sigma} + D_2 h_2\, D_2\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&\qquad \text{tengo presente che } a \times a = 0,\ \ a \times b = -(b \times a) \\
&= D_1 h_1\, D_2 h_2 \left(D_1\boldsymbol{\sigma} \times D_2\boldsymbol{\sigma}\right) + D_1 h_2\, D_2 h_1 \left(D_2\boldsymbol{\sigma} \times D_1\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&= D_1 h_1\, D_2 h_2 \left(D_1\boldsymbol{\sigma} \times D_2\boldsymbol{\sigma}\right) - D_1 h_2\, D_2 h_1 \left(D_1\boldsymbol{\sigma} \times D_2\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&= \left(D_1 h_1\, D_2 h_2 - D_1 h_2\, D_2 h_1\right)\left(D_1\boldsymbol{\sigma} \times D_2\boldsymbol{\sigma}\right) \\
&=: \det(\mathrm{J}_h)\, N_{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \square
\end{aligned}$$

Verifica: invarianza per riparametrizzazioni equivalenti – superfici

Siano $\boldsymbol{\sigma} : K \to \mathbb{R}^3$ e $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} : \widetilde{K} \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazioni equivalenti di $\boldsymbol{\Sigma}$, con $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \circ h$.

Per ogni $(u, v) \in \mathrm{int}(\widetilde{K})$ si ha

$$N_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u, v) = \det(\mathrm{J}_h(u, v))\ N_{\boldsymbol{\sigma}}(h(u, v)),$$

quindi:

$$\iint_{\widetilde{K}} f(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(u, v))\, \|N_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(u, v)\|\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\widetilde{K}} f(\boldsymbol{\sigma}(h(u, v)))\, \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(h(u, v))\|\, |\det(\mathrm{J}_h(u, v))|\, du\, dv$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambiamento di variabili}}}{=} \iint_{K} f(\boldsymbol{\sigma}(x, y))\, \|N_{\boldsymbol{\sigma}}(x, y)\|\, dx\, dy \qquad \square$$

Dimostrazione della estensione del teorema di Poincaré

Per la caratterizzazione dei campi vettoriali conservativi, basta dimostrare che la circuitazione di F su qualsiasi curva regolare (a tratti) chiusa, con sostegno contenuto in A, è uguale a 0; posso limitarmi a considerare curve semplici.

Sia dunque (γ, r) un'arbitraria curva regolare (a tratti), semplice e chiusa, con sostegno contenuto in A; siccome A è semplicemente connesso, esiste $D \subset A$ tale che $\partial D = \gamma$.

Applico il teorema di Gauss-Green:

$$\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right)}_{\substack{\equiv 0 \\ \text{perché } F \text{ è chiuso}}} dx\, dy \;=\; \oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP.$$

Dall'uguaglianza deduco

$$\oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP = 0$$

da cui, ricordando che $\partial D = \boldsymbol{\gamma}$:

$$\left| \oint_{\gamma} F(P) \cdot dP \right| = \left| \oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP \right| = 0$$

Perché il valore assoluto?
Perché non so se r orienta ∂D positivamente o negativamente

e quindi

$$\oint_{\gamma} F(P) \cdot dP = 0 \,. \qquad \square$$

Nota

L'argomento usato nella dimostrazione suggerisce che per escludere che un campo vettoriale chiuso sia conservativo in un aperto connesso "bucato" di $\mathbb{R}^2$ è inutile valutarne la circuitazione su curve chiuse che "non circondano i buchi".