a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Funzioni tra spazi euclidei: calcolo integrale

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Premessa

Nel corso di Analisi Matematica I si è introdotta la nozione di integrale di Riemann per funzioni reali di una variabile reale.

Vogliamo estendere la nozione di integrale a funzioni definite tra generici spazi euclidei di dimensione finita. Tratteremo, nell'ordine:

- funzioni vettoriali di una variabile reale — immediato!
- funzioni reali di due e tre variabili reali definite in insiemi normali (caso particolare, sufficiente per gli scopi di questo corso)
- funzioni vettoriali di due e tre variabili reali definite in insiemi normali — ovvia generalizzazione

Integrale per funzioni vettoriali di una variabile reale

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$.

Diciamo che g è integrabile (secondo Riemann) in $[a, b]$ se lo sono tutte le sue componenti $g_1, \ldots, g_n$.

In tal caso, definiamo integrale (di Riemann) di g in $[a, b]$ il vettore

$$\int_a^b g(t)\,dt := \left(\int_a^b g_1(t)\,dt \ , \ \ldots \ , \ \int_a^b g_n(t)\,dt \right).$$

Osservazioni

- Se g è continua in $[a, b]$, allora g è integrabile.
- Se g è continua in $[a, b]$ e h è una sua primitiva, allora

$$\int_a^b g(t)\,dt = h(b) - h(a).$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ la componente i-esima di h è primitiva di g_i

- $\left\| \int_a^b g(t)\,dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \int_a^b \|g(t)\|_{\mathbb{R}^n}\,dt$ disuguaglianza triangolare

Sottoinsiemi normali di $\mathbb{R}^2$

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$.

Diciamo che D è un insieme normale rispetto all'asse x se esistono un intervallo $[a,b]$ e due funzioni continue $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\,,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\}.$$

Diciamo che D è un insieme normale rispetto all'asse y se esistono un intervallo $[a,b]$ e due funzioni continue $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le y \le b\,,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\Big\}.$$

Diciamo che D è un insieme normale se è normale rispetto a (almeno) uno degli assi coordinati.

In tal caso, chiamiamo area (o misura in $\mathbb{R}^2$) di D il numero reale

$$m_2(D) = \int_a^b (\beta(t) - \alpha(t))\,dt.$$

Motivazione?
Corso di Analisi I

t sta per x o y, a seconda dei casi $\uparrow$

Esempi

Descrivere i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ come insiemi normali oppure unioni di insiemi normali:

- il disco di centro l'origine e raggio 1
- il triangolo di vertici $(0,0),(0,1),(1,1)$
- l'insieme, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle rette di equazione $x=0$, $y=2$ e dal grafico della funzione definita ponendo $y=\sqrt{x}$
- la regione contenuta nel primo quadrante delimitata dalla retta di equazione $2\,x+2\,y=5$ e dall'iperbole di equazione $x\,y=1$
- le due regioni, contenute nel semipiano $y \geq 0$, delimitate dalla retta di equazione $x+y=0$ e dalla circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$
- la regione contenuta nel primo quadrante delimitata dalle rette di equazione $x=0$, $y=x$ e dalla parabola di equazione $y=2-x^2$
- l'anello circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale rispetto a un asse coordinato.

Una suddivisione di D in insiemi normali è un insieme finito di insiemi normali rispetto al medesimo asse coordinato, a due a due privi di punti interni in comune, la cui unione sia D.

Osservazione

$\downarrow$ per asse y osservazione analoga

Sia D un insieme normale rispetto all'asse x, come definito a pagina 3.

Scegliamo

- $x_0, x_1, \ldots, x_h \in [a, b]$ tali che $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_h = b$,
- $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C([a, b], \mathbb{R})$ tali che $\alpha = \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \ldots \leq \varphi_k = \beta$;

per $i \in \{1, \ldots, h\}$ e $j \in \{1, \ldots, k\}$ poniamo

$$D_{i\,j} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\,,\ \varphi_{j-1}(x) \leq y \leq \varphi_j(x)\Big\}.$$

Allora: $\{D_{11}, \ldots, D_{hk}\}$ è una suddivisione di D in insiemi normali.

Notiamo che, suddividendo opportunamente la suddivisione data, ci si può sempre ricondurre a questa rappresentazione.

Esempio (suddivisione uniforme)

Fissiamo $k \in \mathbb{N}^*$. Con le notazioni dell'osservazione, scegliamo i punti x_i e le funzioni φ_j in modo da suddividere in k parti uguali l'intervallo $[a, b]$ e l'intervallo $[\alpha(x), \beta(x)]$, al variare di x in $[a, b]$.

Esplicitiamo: per $i, j \in \{0, \dots, k\}$ poniamo

- $x_i := a + \dfrac{i}{k}(b - a)$
- $\varphi_j(x) := \alpha(x) + \dfrac{j}{k}(\beta(x) - \alpha(x))$ per ogni $x \in [a, b]$
- $D_{i\,j} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \le x \le x_i\,,\ \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x)\Big\}$

Si può dimostrare che il diametro di ciascun insieme della suddivisione tende a 0 se k tende a $+\infty$. $\nwarrow$ $\operatorname{diam}(E) := \sup\{\, \|u - v\|_{\mathbb{R}^n} \mid u, v \in E \,\}$

$\uparrow$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

"Ingredienti" principali della verifica: α, β limitate e uniformemente continue

Proprietà

1. Se D è insieme normale rispetto a un asse coordinato e $\{D_1, \ldots, D_k\}$ è una suddivisione di D in insiemi normali, risulta

$$m_2(D) = m_2(D_1) + \ldots + m_2(D_k). \qquad \text{additività della misura}$$

2. Se D_1 e D_2 sono insiemi normali rispetto allo stesso asse coordinato, la loro intersezione, se diversa dall'insieme vuoto, è ancora un insieme normale rispetto allo stesso asse coordinato.

3. Se D è un insieme normale rispetto a un asse coordinato e σ_1 e σ_2 sono suddivisioni di D in insiemi normali, allora l'insieme σ_{12} delle intersezioni (non vuote) degli elementi di σ_1 e degli elementi di σ_2 è ancora una suddivisione di D in insiemi normali, detta suddivisione generata da σ_1 e σ_2.

Somme integrali

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale rispetto a un asse coordinato.
Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Sia $\sigma := \{D_1, \dots, D_k\}$ una suddivisione di D in insiemi normali.
Definiamo i numeri reali

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma integrale inferiore} \\ \text{di } f \text{ relativa a } \sigma}}{s_f(\sigma)} := \sum_{i=1}^{k} m_2(D_i) \inf f(D_i) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma integrale superiore} \\ \text{di } f \text{ relativa a } \sigma}}{S_f(\sigma)} := \sum_{i=1}^{k} m_2(D_i) \sup f(D_i).$$

Interpretazione grafica ...

Osservazione

Per ogni suddivisione σ si ha $s_f(\sigma) \leq S_f(\sigma)$.

Lemma

Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale e $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Siano σ_1 e σ_2 due suddivisioni di D in insiemi normali.

Sia σ_{12} la suddivisione generata da σ_1 e σ_2.

Allora:

$$s_f(\sigma_1) \leq s_f(\sigma_{12}) \leq S_f(\sigma_{12}) \leq S_f(\sigma_2).$$

Dimostrazione . . .

Da qui in poi, la costruzione che porta alla definizione di integrale in un insieme normale è del tutto simile a quella vista nel corso di AM I per la definizione di integrale di Riemann.

Integrali doppi

Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale e $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo l'insieme delle somme inferiori di f

$$s(f) := \Big\{ s_f(\sigma) \,|\, \sigma \text{ suddivisione di } D \text{ in insiemi normali} \Big\} \subset \mathbb{R}$$

e l'insieme delle somme superiori di f

$$S(f) := \Big\{ S_f(\sigma) \,|\, \sigma \text{ suddivisione di } D \text{ in insiemi normali} \Big\} \subset \mathbb{R}$$

Per il lemma alla pagina precedente, questi due insiemi sono separati; pertanto: $\sup s(f) \leq \inf S(f)$.

Se $\sup s(f) = \inf S(f)$, cioè gli insiemi $s(f)$ e $S(f)$ sono contigui, diciamo che f è integrabile in D.

L'unico elemento separatore degli insiemi $s(f)$ e $S(f)$ si chiama integrale doppio di f in D e si denota con il simbolo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \Big(:= \sup s(f) = \inf S(f) \Big)$$

Esempio

Se $D \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio normale e $f : D \to \mathbb{R}$ è la funzione costante di valore c, allora f è integrabile e

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = c\, m_2(D).$$

Note

- $m_2(D)$ coincide con l'integrale in D della funzione costante di valore 1.
- Se $c \geq 0$, il numero $c\, m_2(D)$ rappresenta il volume di un "cilindro".

Osservazione (interpretazione geometrica dell'integrale doppio)

Se f è una funzione integrabile non negativa:

- le somme inferiori e superiori sono volumi di solidi di $\mathbb{R}^3$ costituiti da "cilindri affiancati";
- l'integrale doppio di f in D rappresenta il volume del solido di $\mathbb{R}^3$ delimitato dall'insieme D contenuto nel piano $x\, y$, dal grafico di f e dai segmenti paralleli all'asse z passanti per i punti della frontiera di D.

Sottoinsiemi normali di $\mathbb{R}^3$ e integrali tripli

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$.

Diciamo che T è un insieme normale rispetto al piano $x\,y$ se esistono D sottoinsieme normale di $\mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : D \to \mathbb{R}$ tali che

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\,,\ \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\Big\}.$$

Con ovvie modifiche si definiscono gli insiemi normali rispetto agli altri piani coordinati.

Diciamo che T è un insieme normale se è normale rispetto a (almeno) uno dei piani coordinati.

In tal caso, chiamiamo volume (o misura in $\mathbb{R}^3$) di T il numero reale

$$m_3(T) = \iint_D (\delta(u, v) - \gamma(u, v))\, du\, dv. \qquad \text{Motivazione?}$$

u, v stanno per x, y o x, z o y, z, a seconda dei casi $\uparrow$

Esempi

Descrivere i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ come insiemi normali oppure unioni di insiemi normali:

- la palla di centro l'origine e raggio 1
- il tetraedro di vertici $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$
- l'insieme delimitato dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal piano di equazione $z = 3 - 2\,y$

La definizione di suddivisione in insiemi normali si ottiene in modo ovvio da quella data per insiemi normali in $\mathbb{R}^2$ sostituendo la parola “asse” con “piano”:

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto a un piano coordinato.
Una suddivisione di T in insiemi normali è un insieme finito di insiemi normali rispetto al medesimo piano coordinato, a due a due privi di punti interni in comune, la cui unione sia T.

Come si può definire la suddivisione uniforme?

diametro di una suddivisione :=
massimo diametro degli insiemi
che la compongono

Osservazione

Le proprietà inerenti

$\downarrow$

- l'esistenza di suddivisioni con diametro arbitrariamente piccolo,
- l'additività della misura,
- la suddivisione generata da due suddivisioni

valgono anche per insiemi normali in $\mathbb{R}^3$.

La definizione di somme integrali si ottiene in modo ovvio da quella data per funzioni di due variabili sostituendo la misura in $\mathbb{R}^2$ con la misura in $\mathbb{R}^3$:

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto a un piano coordinato.

Sia $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Sia $\sigma := \{T_1, \dots, T_k\}$ una suddivisione di T in insiemi normali.

Definiamo la somma integrale inferiore e la somma integrale superiore di f relative a σ ponendo, rispettivamente:

$$s_f(\sigma) := \sum_{i=1}^{k} m_3(T_i) \inf f(T_i) \qquad S_f(\sigma) := \sum_{i=1}^{k} m_3(T_i) \sup f(T_i).$$

Esattamente come nel caso di funzioni di due variabili, gli insiemi delle somme inferiori e delle somme superiori sono separati; se sono contigui, diciamo che f è integrabile in T e chiamiamo l'unico elemento separatore integrale triplo di f in T, denotato con il simbolo

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{Nota: } \iiint_T 1\,dx\,dy\,dz = m_3(T)$$

Alcune proprietà dell'integrale multiplo $\leftarrow$ doppio se $n = 2$, triplo se $n = 3$

Sia U un sottoinsieme normale di $\mathbb{R}^n$, con $n \in \{2, 3\}$.
Se $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile in U, denotiamo con $\displaystyle\int_U f(u)\, du$ l'integrale multiplo di f in U.

1. Integrabilità delle funzioni continue

"Ingredienti":
uniforme continuità di f,
esistenza di suddivisioni con diametro piccolo a piacere

Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:

- f è integrabile in U;
- l'integrale di f è il limite delle somme di Cauchy al tendere a 0 del diametro della suddivisione utilizzata, nel senso che:

  per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che per ogni suddivisione di U in insiemi normali $U_1, \ldots, U_k$ con diametro minore di δ e per ogni $(u_1, \ldots u_k) \in U_1 \times \ldots \times U_k$ si ha

$$\left| \int_U f(u)\, du - \sum_{i=1}^{k} m_n(U_i) f(u_i) \right| < \varepsilon.$$

2 Linearità

L'insieme delle funzioni integrabili in U è uno spazio vettoriale reale e l'applicazione che a ciascuna funzione integrabile associa l'integrale in U è lineare. Esplicitare ...

3 Monotonia

Se $f, g : U \to \mathbb{R}$ sono integrabili e $f(u) \leq g(u)$ per ogni $u \in U$, allora:

$$\int_U f(u)\, du \leq \int_U g(u)\, du.$$

4 Additività

Se U è unione di due insiemi normali U_1 e U_2 privi di punti interni in comune, in ciascuno dei quali f è integrabile, <u>diciamo</u> che f è integrabile in U e <u>definiamo</u>

$$\int_U f(u)\, du := \int_{U_1} f(u)\, du + \int_{U_2} f(u)\, du.$$

Tutto bello, ma... come si calcolano gli integrali multipli?

Formule di riduzione per integrali doppi

Teorema

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale, descritto mediante un intervallo $[a, b]$ e due funzioni continue $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua.

- Se D è normale rispetto all'asse x, cioè

  $$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, a \le x \le b\,,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\Big\}$$

  allora:

  $$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy\Big) dx\,.$$

  integrazione per verticali

- Se D è normale rispetto all'asse y, cioè

  $$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, a \le y \le b\,,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\Big\}$$

  allora:

  $$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\Big) dy\,.$$

  integrazione per orizzontali

Esempi

- Calcolare la misura di un generico insieme normale di $\mathbb{R}^2$ integrando la funzione costante di valore 1.
- Calcolare l'integrale di $f(x, y) = x^2 + x\,y$ nell'insieme $[0, 4] \times [1, 3]$.

  $\rightarrow$ formula di inversione dell'ordine di integrazione
- Calcolare l'integrale di $f(x, y) = x\,y^2$ nell'insieme $[0, 4] \times [1, 3]$.

  $\rightarrow$ integrazione in rettangoli di funzioni "a variabili separabili"
- Calcolare l'integrale di $f(x, y) = x\,y^2$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
- Calcolare l'integrale di $f(x, y) = e^{y^2}$ nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$. $\rightarrow$ scegliere il "giusto" ordine di integrazione!
- Calcolare l'integrale di $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ nell'insieme delimitato dalle rette di equazione $x = 0$, $x = y$, $x + y = 4$ e dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 2$.

Formule di riduzione per integrali tripli

Teorema (formula di integrazione **per fili**)

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un insieme normale rispetto al piano $x\,y$, cioè

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\,,\ \gamma(x, y) \le z \le \delta(x, y)\Big\}$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ insieme normale e $\gamma, \delta : D \to \mathbb{R}$ funzioni continue.

Sia $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora:

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \Big(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x, y, z)\,dz\Big) dx\,dy\,.$$

integrazione per fili paralleli all'asse z

Con ovvie modifiche si ottengono le formule di integrazione per fili paralleli agli altri assi.

Esempi

- Calcolare la misura di un generico insieme normale di $\mathbb{R}^3$ integrando la funzione costante di valore 1.
- Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = x + z$$

nel tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Teorema (formula di integrazione **per strati**)

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ un insieme normale. π_z : proiezione sull'asse z

Posto $a := \min \pi_z(T)$ e $b := \max \pi_z(T)$, supponiamo che per ogni $z \in [a, b]$ l'insieme

$$T_z := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, (x, y, z) \in T\Big\}$$

sezione di T di piede z

sia normale o unione finita di insiemi normali a due a due privi di punti interni in comune.

Sia $f : T \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \Big(\iint_{T_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \Big) dz \,.$$

integrazione per strati paralleli al piano $x\,y$

Con ovvie modifiche si ottengono le formule di integrazione per strati paralleli agli altri piani.

Esempi

- Calcolare il volume della palla di centro l'origine e raggio r.
- Ricalcolare l'integrale della funzione

$$f(x,y,z) = x + z$$

  nel tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

Esempi (volume dei solidi di rotazione)

- Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme

$$\Gamma = \left\{ (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{2} \leq z \leq 2\,,\; \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{z} \right\}.$$

- Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse z il triangolo di vertici $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$.

Cambiamento di variabili negli integrali multipli

Teorema

$\downarrow$ chiusura di un aperto

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2,3\}$) un dominio e sia $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$.

Supponiamo che:

- la restrizione di Φ all'interiore di E sia ingettiva,
- per ogni $u \in \text{int}(E)$: $\det(\mathrm{J}_\Phi(u)) \neq 0$,
- gli insiemi E e $\Phi(E)$ siano normali oppure unione finita di insiemi normali a due a due privi di punti interni in comune.

Allora: per ogni $f \in C(\Phi(E), \mathbb{R})$ si ha

$$\int_{\Phi(E)} f(v)\, dv = \int_E (f(\Phi(u)) \left|\det(\mathrm{J}_\Phi(u))\right| du\,.$$

Confronto con la formula per funzioni di una variabile reale ...

Coordinate polari nel piano

oppure: $(x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta)$

Definiamo $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$.

Osserviamo che:

- Φ è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ e per ogni (ρ, θ) si ha

$$\det(\mathrm{J}_\Phi(\rho,\theta)) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho$$

- $\Phi([0,+\infty)\times[0,2\pi]) = \mathbb{R}^2$ anche: $\Phi([0,+\infty)\times[-\pi,\pi]) = \mathbb{R}^2$
- In $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ la funzione Φ è ingettiva e $\det(\mathrm{J}_\Phi(\rho,\theta)) \neq 0$.

Esempio

Calcolare l'integrale della funzione $f(x,y) = x^2 - 2\,y^2$

- nel disco di centro l'origine e raggio 3;
- nella porzione della corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2, contenuta nel semipiano di equazione $y \geq 0$, delimitata dalle bisettrici dei quadranti.

Esempi

- Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = x\,y$ nell'insieme, contenuto nel primo ottante, delimitato dai piani di equazione $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$ e dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$.
- Calcolare il volume del solido delimitato dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ e dal piano di equazione $z = 3 - 2\,y$.
- Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1.

Digressione

Calcoliamo l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Coordinate ellittiche nel piano

Modifichiamo il cambiamento in coordinate polari, fissando $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e ponendo

$$\Phi(\rho, \theta) = \big(a\,\rho\,\cos\theta,\ \ b\,\rho\,\sin\theta\big).$$

In questo caso:

$$\det\big(\mathrm{J}_{\Phi}(\rho, \theta)\big) = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\,\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,\rho\cos\theta \end{pmatrix} = a\,b\,\rho$$

Esempi

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = x + y$

- nell'insieme, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalla ellisse di equazione $3\,x^2 + 4\,y^2 = 1$;
- nell'insieme, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalla ellisse di equazione $3\,x^2 + 4\,y^2 = 1$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = y$.

attenzione!! ↑

Coordinate polari nello spazio (o sferiche)

Definiamo $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\Phi(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin\varphi \cos\theta,\ \rho \sin\varphi \sin\theta,\ \rho \cos\varphi).$$

Osserviamo che:

- Φ è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ e per ogni (ρ, φ, θ) si ha

$$\det(J_\Phi(\rho, \varphi, \theta)) = \det \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \rho^2 \sin\varphi$$

- $\Phi([0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]) = \mathbb{R}^3$ oppure ...
- In $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ la funzione Φ è ingettiva e

$$\det(J_\Phi(\rho, \varphi, \theta)) \neq 0.$$

Esempi

- Calcolare il volume della palla di centro l'origine e raggio r. Di nuovo!
- Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nell'insieme intersezione del primo ottante con la palla unitaria.
- Calcolare il volume del solido, contenuto nel semispazio superiore, delimitato dalla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esempio (cambiamenti di variabili "ad hoc")

Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = x^2 y^2$ nell'insieme, contenuto nel primo quadrante, delimitato dalle rette di equazione $2x - y = 0$, $x - 2y = 0$ e dalle iperboli di equazione $xy = 2$, $xy = 4$.

Esercizi

- Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = xy$ nell'insieme delimitato dalle rette di equazione $2x + y = 1$, $2x + y = -1$, $x - y = 0$, $x - y = 2$. Suggerimento: definire le variabili $u := 2x + y$, $v := x - y$.
- Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = (x + y)\cos(\pi(x - y))$ nell'insieme delimitato dalle rette di equazione $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 0$, $y = x$. Suggerimento: definire le variabili $u := x + y$, $v := x - y$.

APPENDICE

Verifica della disuguaglianza triangolare

Pongo $X := \int_a^b g(t)\,dt$ e suppongo $X \neq 0$ (altrimenti la tesi è verificata).

Risulta:

$$\|X\|^2 = X \cdot X = X \cdot \int_a^b g(t)\,dt = \sum_{i=1}^n X_i \int_a^b g_i(t)\,dt \overset{\downarrow \text{ linearità}}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n X_i\, g_i(t)\,dt$$

ometto $\mathbb{R}^n$

$$= \int_a^b X \cdot g(t)\,dt \underset{\uparrow \text{ monotonia}}{\leq} \int_a^b |X \cdot g(t)|\,dt \underset{\uparrow \text{ Cauchy-Schwarz + monotonia}}{\leq} \int_a^b \|X\|\,\|g(t)\|\,dt$$

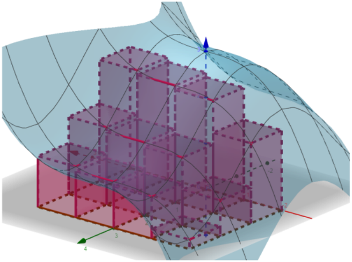
$$= \|X\| \int_a^b \|g(t)\|\,dt.$$

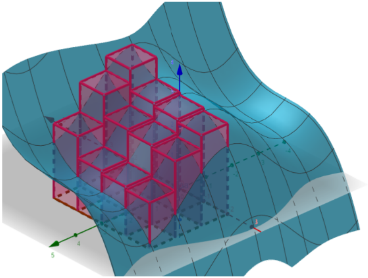
Dividendo per $\|X\|$ (strettamente positivo) ottengo $\|X\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt$ e sostituendo X:

$$\left\| \int_a^b g(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\|\,dt\,.$$

□

Rappresentazione grafica di somme integrali inferiori e superiori





Fonte delle immagini:

https://moodle2.units.it/pluginfile.php/314694/mod_resource/content/2/Integrazione1%202.0.pdf

Dimostrazione del lemma

Introduco le notazioni:

$\sigma_1 = \{D_1, \ldots, D_h\}, \quad \sigma_2 = \{E_1, \ldots, E_k\}$

$\sigma_{12} = \{A_{11}, \ldots, A_{hk}\}$ con $A_{i\,j} := D_i \cap E_j \;\; (\neq \emptyset)$

Osservo che per ogni i:

$$D_i = D_i \cap D = D_i \cap \bigcup_{j=1}^{k} E_j = \bigcup_{j=1}^{k} (D_i \cap E_j) = \bigcup_{j=1}^{k} A_{i\,j}$$

da cui, per l'additività della misura:

$$m_2(D_i) = \sum_{j=1}^{k} m_2(A_{i\,j}). \tag{1}$$

Inoltre, per ogni j:

$$A_{i\,j} \subseteq D_i \implies f(A_{i\,j}) \subseteq f(D_i) \implies \inf f(D_i) \leq \inf f(A_{i\,j}). \tag{2}$$

Tenendo conto di (1) e (2) calcolo

$$s_f(\sigma_1) := \sum_{i=1}^{h} m_2(D_i) \inf f(D_i) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} m_2(A_{i\,j}) \inf f(D_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} m_2(A_{i\,j}) \inf f(A_{i\,j}) =: s_f(\sigma_{12})$$

In modo analogo, ragionando sugli insiemi E_j, posso dimostrare che

$$S_f(\sigma_2) \geq S_f(\sigma_{12}).$$

Dunque:

$$s_f(\sigma_1) \leq s_f(\sigma_{12}) \leq S_f(\sigma_{12}) \leq S_f(\sigma_2). \qquad \square$$

Insiemi normali rispetto ai piani $x\,z$ e $y\,z$

Diciamo che T è un insieme normale rispetto al piano $x\,z$ se esistono D sottoinsieme normale di $\mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : D \to \mathbb{R}$ tali che

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D\,,\ \gamma(x, z) \leq y \leq \delta(x, z)\Big\}.$$

Diciamo che T è un insieme normale rispetto al piano $y\,z$ se esistono D sottoinsieme normale di $\mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $\gamma, \delta : D \to \mathbb{R}$ tali che

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D\,,\ \gamma(y, z) \leq x \leq \delta(y, z)\Big\}.$$

Formule di integrazione per fili paralleli agli assi y e x

- Se $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, z) \in D \,, \gamma(x, z) \leq y \leq \delta(x, z)\right\}$

  allora:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right) dx\, dz\,.$$

integrazione per fili paralleli all'asse y

- Se $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (y, z) \in D \,, \gamma(y, z) \leq x \leq \delta(y, z)\right\}$

  allora:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{\gamma(y,z)}^{\delta(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right) dy\, dz\,.$$

integrazione per fili paralleli all'asse x