a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica II

Funzioni tra spazi euclidei: calcolo differenziale

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Derivate direzionali

versore, direzione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$. $\qquad\downarrow$

Sia $\bar{x}$ un punto interno di A. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Diciamo che f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v se esiste finito

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\, v) - f(\bar{x})}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$$

derivata di f in $\bar{x}$
nella direzione v

Osservazione

Dato che $\bar{x}$ è interno ad A, esiste $r \in \mathbb{R}^*_+$ tale che $B_r(\bar{x}) \subseteq A$.

Per ogni $t \in (-r, r)$ è lecito valutare f nel punto $\bar{x} + t\, v$, che appartiene a $B_r(\bar{x})$. Pertanto, la funzione rapporto incrementale

$$(*) \qquad t \mapsto \frac{f(\bar{x} + t\, v) - f(\bar{x})}{t}$$

è definita in $(-r, r) \setminus \{0\}$ e ha senso considerarne il limite per $t \to 0$.

$\nwarrow$ non è detto che esista o che sia finito

Osservazione

Con le notazioni già introdotte, definiamo la funzione $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$g(t) := f(\bar{x} + t\,v).$$

Notiamo che g è una funzione reale di una variabile reale; è la restrizione di f a un segmento, "centrato" in x, giacente sulla retta passante per $\bar{x}$ individuata dalla direzione v.

Possiamo riscrivere la funzione rapporto incrementale $(*)$ in termini di g:

$$t \in (-r, r) \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(\bar{x} + t\,v) - f(\bar{x})}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t}.$$

Deduciamo immediatamente:

- f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v se e solo se g è derivabile in $t = 0$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = g'(0)$.

Esempi

Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili nei punti e nelle direzioni assegnate:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \qquad \bar{x} = (3, 1) \qquad v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - 1|(x_1 + x_2) \qquad \bar{x} = (1, 3) \qquad v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$v = (0, 1)$$

Derivate parziali

Per $i \in \{1, \ldots, n\}$ denotiamo con e_i l'elemento di $\mathbb{R}^n$ avente la i-esima componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a 0.

Evidentemente $\|e_i\|_{\mathbb{R}^n} = 1$, ossia e_i è una direzione.

Nota: $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la **base canonica** di $\mathbb{R}^n$; ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si rappresenta come

$$x = x_1\, e_1 + \ \ldots \ + x_n\, e_n.$$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$.

Se f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione e_i, si dice che f è derivabile parzialmente in $\bar{x}$ rispetto alla i-esima variabile; la derivata di f in $\bar{x}$ nella direzione e_i si chiama derivata parziale in $\bar{x}$ rispetto alla i-esima variabile e si denota con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \quad D_i f(\bar{x}), \quad f_{x_i}(\bar{x}) \qquad\qquad \text{invece di } \frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})$$

Esplicitando:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x} + t\, e_i) - f(\bar{x})}{t} = \qquad\qquad e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1},\ \bar{x}_i + t,\ \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1},\ \bar{x}_i,\ \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)}{t}$$

perciò: la derivata parziale rispetto alla variabile x_i si ottiene considerando come fissate tutte le altre variabili e derivando rispetto a x_i.

Esempi

Calcolare (dove possibile) le derivate parziali delle seguenti funzioni:

- $f(x, y) = 8\,x\,y + 5\,x^4\,y^2 - y^3$
- $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sia $\bar{x}$ un punto interno di A in cui f è derivabile parzialmente rispetto a tutte le variabili. Per brevità diremo: "derivabile parzialmente"

Il vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti sono, nell'ordine, le derivate parziali di f in $\bar{x}$ rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$ si chiama gradiente di f in $\bar{x}$ e si denota con il simbolo $\nabla f(\bar{x})$, o anche con $\mathrm{grad} f(\bar{x})$, $Df(\bar{x})$.

Esplicitando:

$$\nabla f(\bar{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \ \ldots \ , \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

Esempio

Scrivere il gradiente di $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$ in $(1, 1, -1)$.

$\downarrow$ cioè in tutti i punti di B

Se $B \subseteq \mathrm{int}(A)$ e f è derivabile parzialmente in B, chiamiamo funzione gradiente di f la funzione vettoriale che a ogni $x \in B$ associa il gradiente di f in x.

Esempio (importante)

Verificare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

è derivabile in qualsiasi direzione nel punto $(0,0)$.

Nota: f non è continua in $(0,0)$

Osservazione

L'esempio precedente mostra che per le funzioni di più variabili reali la derivabilità parziale o direzionale in un punto non implica la continuità.

Differenza con le funzioni di una variabile!

È possibile introdurre una nozione "più forte" di derivabilità, che implichi la continuità come nel caso delle funzioni di una variabile?

Differenziabilità e differenziale

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ un punto interno di A.

Diciamo che f è differenziabile in $\bar{x}$ se

1. f è derivabile parzialmente in $\bar{x}$
2. $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$

Esempi

Verificare se le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0,0)$:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = |x\,y| \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,y^2}{(x^4+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \text{int}(A)$ con f differenziabile in $\bar{x}$.

Chiamiamo differenziale di f in $\bar{x}$ l'applicazione lineare $df_{\bar{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita ponendo

↑ perché?

$$df_{\bar{x}}(h) := \nabla f(\bar{x}) \cdot h \qquad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^n.$$

Nota: $df_{\bar{x}}$ è un **omomorfismo** tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$.

Esempi

- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è costante, allora f è differenziabile in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con differenziale uguale all'applicazione costante di valore 0.
- Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare, allora f è differenziabile in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con differenziale uguale a f.
- La funzione definita ponendo $f(x, y) = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è differenziabile ovunque.

Proposizione (proprietà delle funzioni differenziabili)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$ con f differenziabile in $\bar{x}$. Allora:

1. f è continua in $\bar{x}$;

2. f è derivabile in $\bar{x}$ in qualsiasi direzione v e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = df_{\bar{x}}(v) \quad \Big(= \nabla f(\bar{x}) \cdot v\Big)$$

Dimostrazione . . .

Osservazione

identica a quella che vale per le funzioni derivabili di una variabile... È un caso? No!

Per il punto 1 della proposizione, la continuità in un punto è condizione necessaria per la differenziabilità; tale condizione non è sufficiente.

Esempio . . .

Nota

L'uguaglianza $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$ viene chiamata formula del gradiente.

Affinché la formula del gradiente *abbia senso* è sufficiente che in $\bar{x}$ la funzione f sia derivabile parzialmente e nella direzione v; tuttavia, se f non è differenziabile in $\bar{x}$, non è detto che l'uguaglianza sia *soddisfatta*.

Esempi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non differenziabile in $(0,0)$

$\nabla f(0,0) \cdot v = 0$ per ogni v

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq 0$ se $v \notin \{e_1, e_2\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\, y^2}{(x^4 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non differenziabile in $(0,0)$

$\nabla f(0,0) \cdot v = 0$ per ogni v

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$ per ogni v

Osservazione

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$, con f differenziabile in $\bar{x}$.

Supponiamo $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$.

Allora:

disug. di Cauchy-Schwarz

- per ogni direzione v : $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})\right| = |\nabla f(\bar{x}) \cdot v| \overset{\downarrow}{\leq} \|\nabla f(\bar{x})\|_{\mathbb{R}^n}$
- l'uguaglianza è verificata per $v = \pm \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|_{\mathbb{R}^n}}$

Dunque:

il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x})$ individua la direzione di massima pendenza.

$\uparrow$ interpretazione geometrica del gradiente

Teorema (del differenziale totale) $\leftarrow$ condiz. sufficiente per differenziabilità

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \text{int}(A)$. Supponiamo che:

- f sia derivabile parzialmente in un intorno di $\bar{x}$,
- le derivate parziali di f siano continue in $\bar{x}$.

Allora: f è differenziabile in $\bar{x}$.

Dimostrazione per $n = 2$ ...

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Se f è derivabile parzialmente in A con derivate parziali continue in A, diciamo che f è di classe C^1 in A e scriviamo $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Corollario

Ogni funzione di classe C^1 in un insieme aperto è differenziabile in tale insieme (cioè in ogni punto di tale insieme).

Esempi

- Le funzioni polinomiali e le funzioni razionali sono differenziabili nei rispettivi domini.
- Studiare la differenziabilità delle funzioni negli esempi di pagina 8.
- Sia f la funzione reale definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = y^4 + 3\,x^3\,y - y^2 \cos(x)$$

  e sia $v = (1/\sqrt{5}\,,\, 2/\sqrt{5})$.

  Stabilire se è lecito utilizzare la formula del gradiente per calcolare la derivata di f in $(0, 1)$ nella direzione v; in caso affermativo, calcolarla.

Linearizzazione e piano tangente

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$, con f differenziabile in $\bar{x}$.

Per definizione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(h)}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

che equivale a

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(h) = o(\|h\|_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{per } h \to 0$$

e si può riscrivere come

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(h) + o(\|h\|_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{per } h \to 0.$$

Con $h = x - \bar{x}$, questo equivale a

$$(*) \qquad f(x) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}) \quad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Chiamiamo linearizzazione di f in $\bar{x}$ la funzione $\varphi_{\bar{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\varphi_{\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(x - \bar{x}).$$

Nota: $\varphi_{\bar{x}}$ si ottiene sommando la costante $f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(\bar{x})$ all'applicazione lineare $df_{\bar{x}}$, pertanto in genere non è lineare. (È "affine".)

Rileggiamo $(*)$:
in prossimità di $\bar{x}$ la linearizzazione $\varphi_{\bar{x}}$ approssima f a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}$.
Dunque: il grafico di $\varphi_{\bar{x}}$ approssima "bene" il grafico di f.

Il grafico di $\varphi_{\bar{x}}$ si chiama piano tangente in $\bar{x}$ al grafico di f; l'equazione del piano tangente è

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(x - \bar{x}) \ \left(= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})\right).$$

"Piano" tangente?

Esempi

- Determinare l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ al grafico della funzione definita ponendo
$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2.$$
- Determinare l'equazione del piano tangente nel punto $(1,-1,1)$ al grafico della funzione definita ponendo
$$f(x,y,z) = e^{x+y}\, z^2 + 1.$$

Nota

Il piano tangente in $\bar{x}$ al grafico di f contiene le rette tangenti in $\bar{x}$ ai grafici di tutte le "restrizioni direzionali" di f.

Derivate e differenziale di funzioni vettoriali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; siano $f_1, \ldots, f_m$, nell'ordine, le componenti di f. Sia $\bar{x} \in \text{int}(A)$.

La definizione di derivata direzionale di f in $\bar{x}$ (e quindi anche quella di derivata parziale di f in $\bar{x}$) è formalmente identica alla definizione data per una funzione scalare.

È immediato riconoscere che f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v se e solo se lo sono tutte le sue componenti; inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(\bar{x}), \ \ldots \ , \frac{\partial f_m}{\partial v}(\bar{x}) \right).$$

Analogamente, f è derivabile parzialmente in $\bar{x}$ rispetto alla i-esima variabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti; inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{x}), \ \ldots \ , \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{x}) \right).$$

Con le notazioni della pagina precedente, supponiamo f derivabile parzialmente in $\bar{x}$.

Chiamiamo matrice jacobiana (o jacobiano) di f in $\bar{x}$ la matrice reale con m righe e n colonne la cui riga i-esima contiene gli elementi del gradiente di f_i in $\bar{x}$. In simboli:

piccolo abuso di notazione

$$\mathrm{J}_{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Esempi

Scrivere la matrice jacobiana delle funzioni

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x, y) = \left(x\,y^2,\ e^{3\,x - y^2},\ x^2 + y^4\right)$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y, z) = \left(x\,y^2 + z^2,\ 5\,x^2 + e^{x\,y\,z}\right)$.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; siano $f_1, \ldots, f_m$, nell'ordine, le componenti di f. Sia $\bar{x} \in \text{int}(A)$.

Diciamo che f è differenziabile in $\bar{x}$ se tutte le componenti $f_1, \ldots, f_m$ sono differenziabili in $\bar{x}$; chiamiamo differenziale di f in $\bar{x}$ la funzione vettoriale $df_{\bar{x}}$ di componenti $df_1(\bar{x}), \ldots, df_m(\bar{x})$, nell'ordine.

Evidentemente, $df_{\bar{x}}$ è un omomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$; per ogni $h \in \mathbb{R}^n$:

$$df_{\bar{x}}(h) := \begin{pmatrix} df_1(\bar{x})(h) \\ \vdots \\ df_m(\bar{x})(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \cdot h \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \cdot h \end{pmatrix}$$

prodotto "righe per colonne"

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x})\, h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x})\, h_n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x})\, h_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x})\, h_n \end{pmatrix} = \mathrm{J}_f(\bar{x})\, h,$$

vedi Geometria

quindi: la matrice jacobiana $\mathrm{J}_f(\bar{x})$ è la matrice $m \times n$ associata a $df_{\bar{x}}$.

Osservazioni

- Con le ovvie modifiche, alle funzioni vettoriali si estendono le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti per la differenziabilità. Cioè?

- Se f è differenziabile in $\bar{x}$ vale l'uguaglianza

$$f(x) = f(\bar{x}) + df_{\bar{x}}(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}) \qquad \text{per } x \to \bar{x}$$

  equivalente a

$$f(x) = f(\bar{x}) + \mathrm{J}_f(\bar{x})\,(x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}) \qquad \text{per } x \to \bar{x}$$

  e si può parlare di linearizzazione di f in $\bar{x}$.

Esercizio

Stabilire se la funzione vettoriale $f(x, y) = \left(x\,y^2,\ e^{3\,x - y^2},\ x^2 + y^4\right)$ è differenziabile in $(0, 0)$; in caso affermativo, scriverne la linearizzazione.

Regole di calcolo per le derivate parziali (per gradienti, per differenziali)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $x \in \mathrm{int}(A)$.

Supponiamo f, g, φ derivabili parzialmente rispetto a x_i in x.

Allora:

$f + g$, λf, φf, $f \cdot g$ sono derivabili parzialmente rispetto a x_i in x e

- $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$

- $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}(x) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

- $\dfrac{\partial(\varphi f)}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, f(x) + \varphi(x)\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

- $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$

Differenziale e composizione funzionale

Teorema

Siano $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ $(n+m+p \geq 4)$. $\leftarrow$ altrimenti il risultato è noto

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$; supponiamo $f(A) \subseteq B$.

Sia $x \in \operatorname{int}(A)$; supponiamo $f(x) \in \operatorname{int}(B)$.

Se f è differenziabile in x e g è differenziabile in $f(x)$, allora:

1. $g \circ f$ è differenziabile in x
2. $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$
3. $\mathrm{J}_{g \circ f}(x) = \mathrm{J}_g(f(x))\, \mathrm{J}_f(x)$

Esempio

Verificare la validità di 3 per le funzioni

$$f(x, y) = (x + y,\ x\,y,\ x\,y^2), \qquad g(u, v, w) = u\,v^2 w.$$

Con le notazioni del teorema, esplicitiamo ❸ in modo da ricavare le derivate parziali della funzione composta:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{g\circ f}(x) &= \mathrm{J}_g(f(x))\,\mathrm{J}_f(x) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(x)) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_1}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_p}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_p}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \begin{matrix} \forall\, k \in \{1,\dots,p\} \\ \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \end{matrix} : \quad \frac{\partial (g\circ f)_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)
$$

Caso particolare: $n = p = 1$

$$(g \circ f)'(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x)) \right) \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x))\, f_j'(x) = \nabla g(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esempio

Verificare la validità della formula qui sopra per le funzioni

$$f(x) = (x + 2,\ x^2 + x), \qquad g(u, v) = u^2 - 2\,v^3.$$

Derivate parziali successive

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$. Fissiamo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Supponiamo che f sia derivabile parzialmente rispetto a x_i in un intorno U di $\bar{x}$. Se la funzione

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := x \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

è derivabile parzialmente in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_j, diciamo che f è derivabile parzialmente due volte in $\bar{x}$ rispetto a x_i e x_j.

La derivata parziale in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_j della funzione $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ si chiama derivata parziale seconda di f in $\bar{x}$ rispetto a x_i e x_j; si denota con uno dei simboli $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$, $D_{ij} f(\bar{x})$, $f_{x_i x_j}(\bar{x})$.

Per $j \neq i$ la derivata parziale seconda si dice mista; per $j = i$ si dice pura e il primo simbolo si scrive $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x})$.

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$.
Supponiamo che f sia derivabile parzialmente due volte in $\bar{x}$
(cioè derivabile parzialmente rispetto a x_i e x_j, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$).
La matrice

$$H_f(\bar{x}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

si chiama matrice hessiana di f in $\bar{x}$.

Nota: $H_f(\bar{x}) = \mathrm{J}_{\nabla f}(\bar{x})$

Osservazione

In generale, le derivate parziali seconde miste dipendono dall'ordine in cui si esegue la derivazione. Esempio:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ 0 & (x,y) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

Se la funzione è sufficientemente regolare, l'ordine di derivazione non è rilevante:

Teorema (di Schwarz)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \operatorname{int}(A)$. Siano $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$.

Se le derivate parziali seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ esistono in un intorno di $\bar{x}$ e sono continue in $\bar{x}$, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}).$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Diciamo che f è di classe C^2 in A (e scriviamo $f \in C^2(A,\mathbb{R})$) se f è derivabile parzialmente in A con derivate parziali seconde continue in A.

Osservazione

Come corollario del teorema di Schwarz, per ogni funzione di classe C^2:

- le derivate parziali seconde miste non dipendono dall'ordine in cui si esegue la derivazione;
- la matrice hessiana è simmetrica. $\leftarrow$??

Esempio

Scrivere la matrice hessiana della funzione definita in $\mathbb{R}^3$ ponendo

$$f(x,y,z) = x^5 + y^4 z^3 - 3\,x\,z^2.$$

Nota

Data $f \in C^2(A,\mathbb{R})$, la funzione $\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ si chiama laplaciano di f.

traccia della matrice hessiana $\nearrow$

"Esercizio teorico" Cioè: pensateci se ne avete voglia ...

- Come si possono introdurre le nozioni di derivabilità parziale e di derivate parziali di ordine $k \geq 3$?
  Cosa vuole dire che una funzione è di classe C^k?
- Come si generalizza il teorema di Schwarz?
- Come si definisce la derivabilità parziale di ordine $k \geq 2$ per funzioni vettoriali?

Alcune applicazioni del calcolo differenziale

Teorema (del valor medio di Lagrange)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e siano $x, y \in A$. Supponiamo che:

- il segmento $[x, y]$ sia contenuto nell'interiore di A;
- f sia differenziabile nei punti di $[x, y]$.

Allora: esiste $z \in [x, y] \setminus \{x, y\}$ tale che

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x) \quad \Big(= df_z(y - x)\Big).$$

Dimostrazione ... Si estende a funzioni vettoriali? No!

$\downarrow$??

Corollario (caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A insieme aperto e connesso.

Supponiamo che f sia derivabile parzialmente in A e che $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Allora: f è costante in A.

Dimostrazione ... Si estende a funzioni vettoriali? Si!

Teorema (formula di Taylor di ordine 2, con il resto di Peano)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$.

Supponiamo che f sia di classe C^2 in un intorno di $\bar{x}$.

Posto

$$T_{\bar{x},2}(x) := f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{x})\,(x - \bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

si ha

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - T_{\bar{x},2}(x)}{\|x - \bar{x}\|^2_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

e quindi

$$f(x) = T_{\bar{x},2}(x) + o(\|x - \bar{x}\|^2).$$

Motivazione . . .

La funzione polinomiale $T_{\bar{x},2}$ si chiama polinomio di Taylor di f di centro $\bar{x}$ e ordine 2.

Esempi

Scrivere la formula di Taylor con il resto di Peano di centro $(0,0)$ e ordine 2 delle funzioni

- $f(x,y) = \dfrac{\cos(x)}{\cos(y)} \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \times \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

- $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Calcolo differenziale per curve e superfici

Sia (γ, r) una curva in $\mathbb{R}^n$, con intervallo dei parametri I.

Diciamo che la curva è regolare se

- $r \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$;
- se la curva è chiusa, $r'(\min \mathrm{I}) = r'(\max \mathrm{I})$;
- $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathrm{I}$.

In tal caso, per ogni $t_0 \in \mathrm{I}$ possiamo considerare

- la retta parametrizzata da

  $s \in \mathbb{R} \mapsto r(t_0) + s\, r'(t_0)$ retta tangente in t_0

- il versore $T(t_0) := \dfrac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}}$ versore tangente in t_0

Motivazione ... Interpretazione cinematica ...

Esempi

Verificare se le curve di parametrizzazione

- $t \in [0,1] \mapsto x + t\,(y - x)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y)$
- $t \in [0, 2\,\pi] \mapsto (\cos(t),\ \sin(t))$
- $t \in [-1,1] \mapsto (t^3,\ t^2)$
- $t \in \mathbb{R} \mapsto (a\cos(t),\ b\sin(t),\ c\,t)$ $(a, b \in \mathbb{R}^*_+, c \in \mathbb{R}^*)$ elica cilindrica

sono regolari; in caso affermativo, determinarne il versore tangente in ogni punto.

Diciamo che la curva è regolare a tratti se l'intervallo dei parametri I si può suddividere in un numero finito di intervalli $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_k$ tali che

- la restrizione di r a ciascun intervallo è di classe C^1,
- $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathsf{int}(\mathrm{I}_1) \cup \ldots \cup \mathsf{int}(\mathrm{I}_k)$.

l'esistenza del versore tangente non è garantita negli estremi degli intervalli $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_k$

Diciamo che la curva è quasi regolare se è "regolare a tratti in un solo tratto", cioè se

- $r \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$,
- $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathsf{int}(\mathrm{I})$.

Nota: talvolta, invece di "(γ, r) è una curva regolare (quasi regolare, regolare a tratti)", diremo "r è una parametrizzazione regolare (quasi regolare, regolare a tratti) di γ".

Esempi

Stabilire se le curve definite dalle seguenti parametrizzazioni sono regolari, quasi regolari, oppure regolari a tratti, e descriverne il sostegno:

- $r(t) = (|t-1|,\ 1-|t-1|), \quad t \in [0,2]$
- $r(t) = (t(t-1),\ t(t-1)(2t-1)), \quad t \in \mathbb{R}$
- $r(t) = (\cos^3(t),\ \sin^3(t)), \quad t \in [0,2\pi]$ asteroide
- $r(t) = \begin{cases} (2\,t - t^2,\ 0) & t \in [0,1) \\ (1,\ (t-1)^2) & t \in [1,2] \end{cases}$

Esempio (curva grafico)

Dati $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f \in C^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, consideriamo la curva grafico associata a f, parametrizzata da $r(t) = (t,\ f(t))$, $t \in \mathrm{I}$.

Per ogni $t \in \mathrm{I}$ si ha $r'(t) = \underbrace{(1, f'(t))}_{\neq (0,0)}$, quindi la curva grafico è regolare.

Fissato $t_0 \in \mathrm{I}$, la retta tangente alla curva grafico in t_0 ha equazioni parametriche

$$x = t_0 + s, \qquad y = f(t_0) + s\, f'(t_0), \qquad s \in \mathbb{R};$$

eliminando il parametro s otteniamo l'equazione cartesiana

$$y = f(t_0) + (x - t_0)\, f'(t_0).$$

Dunque, com'era prevedibile: la retta tangente alla curva grafico in t_0 coincide con la retta tangente al grafico di f in t_0.

Nota: se f è di classe C^1 a tratti, la curva grafico è regolare a tratti.

Attraverso la nozione di curva regolare (a tratti) definiamo una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

$\uparrow$ sta per "regolare o regolare a tratti"

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. Diciamo che D è un dominio regolare se

- D è la chiusura di un insieme aperto, limitato e connesso;
- la frontiera di D è unione disgiunta di un numero finito di insiemi $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, ciascuno dei quali è sostegno di una curva semplice, chiusa e regolare (a tratti).

Gli insiemi $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ si chiamano componenti di ∂D.

Esempi ...

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia γ una componente di ∂D con parametrizzazione regolare $r(t) = \big(x(t),\ y(t)\big)$, $t \in \mathrm{I}$. ovvie modifiche se regolare a tratti

Per ogni $t \in \mathrm{I}$ definiamo il versore normale in t:

$$n(t) := \left(\frac{y'(t)}{\|r'(t)\|_{\mathbb{R}^n}},\ -\frac{x'(t)}{\|r'(t)\|_{\mathbb{R}^n}} \right). \qquad \leftarrow$$

uno dei due versori ortogonali a $T(t)$

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- per ogni $t \in \mathrm{I}$ il versore normale $n(t)$ punta verso l'esterno di D,
- percorrendo γ si lascia D a sinistra.

Vera l'una o l'altra, diciamo che r orienta positivamente γ.

Esempi ...

Se ciascuna componente di ∂D è orientata positivamente, diciamo che la frontiera di D è orientata positivamente e la denotiamo con ∂D^+.

Esempi ...

Richiamo: prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Definiamo in $\mathbb{R}^3$ il prodotto vettoriale ponendo

$$a \times b := (a_2\, b_3 - a_3\, b_2\,,\; a_3\, b_1 - a_1\, b_3\,,\; a_1\, b_2 - a_2\, b_1)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}^3$. Notazione alternativa: $a \wedge b$

Nota

$a \times b$ si ottiene formalmente sviluppando rispetto alla prima riga il *determinante simbolico*

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Esempio ...

Alcune proprietà del prodotto vettoriale

- $a \times b = -(b \times a)$
- $a \times b = 0$ se e solo se a e b sono l'uno multiplo dell'altro
  (cioè **linearmente dipendenti**)
- $(a \times b) \cdot a = (a \times b) \cdot b = 0$ $\leftarrow$ $a \times b$ è **ortogonale** sia a a che a b
  e quindi ...
- $\|a \times b\|_{\mathbb{R}^3}$ = area del parallelogramma costruito sui vettori a e b

Fine del richiamo

Sia $(\mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie in $\mathbb{R}^3$ con insieme di parametri K.

Diciamo che la superficie è regolare se

- la restrizione di $\boldsymbol{\sigma}$ all'interiore di K è di classe C^1;
- per ogni $(u, v) \in \mathrm{int}(K)$ la matrice jacobiana $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\sigma}}(u, v)$ ha $\overset{\downarrow\,??}{\text{rango}}$ 2.

In tal caso per ogni $(u_0, v_0) \in \mathrm{int}(K)$ possiamo considerare:

- il piano individuato dai vettori $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$ — piano tangente in (u_0, v_0)

  linearmente indipendenti $\nearrow$

- il vettore $N_{\boldsymbol{\sigma}}(u_0, v_0) := \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$ — vettore normale in (u_0, v_0)

  $\nwarrow$ non nullo

- il versore $n_{\boldsymbol{\sigma}}(u_0, v_0) := \dfrac{N_{\boldsymbol{\sigma}}(u_0, v_0)}{\|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u_0, v_0)\|}$ — versore normale in (u_0, v_0)

Esempi

Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$.

Verificare che le seguenti superfici sono regolari e determinare i corrispondenti versori normali:

- la superficie cilindrica, con parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\theta, z) = (r\ \cos(\theta),\ r\ \sin(\theta),\ z);$$

- la superficie sferica, con parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta) = (r\ \sin(\varphi)\cos(\theta),\ r\ \sin(\varphi)\sin(\theta),\ r\ \cos(\varphi)).$$

Osservazione

Sia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie con insieme di parametri K.

Abbiamo convenuto di assumere tacitamente che $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfi la condizione

$(*)$ presi due elementi distinti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in K$, di cui almeno uno interno a K, si ha $\boldsymbol{\sigma}(u_1, v_1) \neq \boldsymbol{\sigma}(u_2, v_2)$.

In particolare, la restrizione di $\boldsymbol{\sigma}$ all'interno di K è ingettiva.

Pertanto, posto $\boldsymbol{\Sigma}_0 := \boldsymbol{\sigma}\big(\mathrm{int}(K)\big)$, per ogni $P \in \boldsymbol{\Sigma}_0$ esiste un unico elemento di $\mathrm{int}(K)$ che $\boldsymbol{\sigma}$ trasforma in P; lo denotiamo con $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(P)$.

Supponiamo ora che $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ sia regolare.

Definiamo il campo vettoriale normale $n : \boldsymbol{\Sigma}_0 \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$n(P) := n_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(P)) \qquad \text{per ogni } P \in \boldsymbol{\Sigma}_0.$$

Se il campo vettoriale normale n è prolungabile con continuità a $\boldsymbol{\Sigma}$, diciamo che la superficie è orientabile.

Osservazioni

- Se l'insieme dei parametri è aperto, la superficie è banalmente orientabile.
- Il sostegno di una superficie orientabile ha due "facce", quella da cui "esce" e quella da cui "entra" il campo vettoriale normale.

Esempi

- La superficie cilindrica e la superficie sferica sono orientabili.
- Il nastro di Möbius non è una superficie orientabile.
  $\uparrow$???

Diciamo che $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ è una superficie regolare con bordo se

- l'insieme dei parametri K è un dominio regolare;
- $\boldsymbol{\sigma}$ è ingettiva in K; ??
- $\boldsymbol{\sigma}$ è di classe C^1 in K e per ogni $(u, v) \in K$ la matrice jacobiana $\mathrm{J}_{\boldsymbol{\sigma}}(u, v)$ ha rango 2.

in **tutto** K!

L'insieme $\boldsymbol{\sigma}(\partial K) =: \partial\boldsymbol{\Sigma}$ si chiama bordo della superficie.

$\uparrow$ da non confondere con la frontiera di $\boldsymbol{\Sigma}$, che coincide con $\boldsymbol{\Sigma}$

Nota: ogni superficie regolare con bordo è anche una superficie regolare (nel senso della definizione di pagina 43) ed è orientabile.

Osservazione

Se la frontiera di K è unione disgiunta di m sostegni di curve in $\mathbb{R}^2$ semplici, chiuse e regolari (a tratti), allora il bordo di $\boldsymbol{\Sigma}$ è unione disgiunta di m sostegni di curve in $\mathbb{R}^3$ semplici, chiuse e regolari (a tratti).

Osservazioni

Se r_j parametrizza la j-esima componente di ∂K, allora $\boldsymbol{\sigma} \circ r_j$ parametrizza la j-esima componente di $\partial \boldsymbol{\Sigma}$.

Il verso di percorrenza scelto su ciascuna componente della frontiera di K induce un verso di percorrenza sulla corrispondente componente del bordo di $\boldsymbol{\Sigma}$.

Esempio: "mezzo cilindro" ...

Se la frontiera di K è orientata positivamente, diciamo che il bordo della superficie è orientato positivamente e lo denotiamo con $\partial \boldsymbol{\Sigma}^+$.

Osservazione

Percorrendo $\partial \boldsymbol{\Sigma}^+$ si lascia a sinistra la faccia della superficie da cui "esce" il versore normale.

Esempio (superficie grafico)

Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un insieme di parametri.

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (u,\ v,\ \underset{\uparrow}{f(u,v)})$$

- Se K è un insieme aperto e $f \in C^1(K,\mathbb{R})$, allora la superficie grafico associata a f è una superficie regolare orientabile.
- Se K è un dominio regolare e $f \in C^1(K,\mathbb{R})$, allora la superficie grafico associata a f è una superficie regolare con bordo.

Per ogni $(u,v) \in K$ si ha

il vettore normale punta verso l'alto

- $N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u,v),\ -\frac{\partial f}{\partial v}(u,v),\ \overset{\downarrow}{1}\right)$
- $\underset{\uparrow \text{ in } \mathbb{R}^3}{\|N_{\boldsymbol{\sigma}}(u,v)\|} = \sqrt{\underset{\uparrow \text{ in } \mathbb{R}^2}{\|\nabla f(u,v)\|^2} + 1}.$

Nota: il piano tangente alla superficie coincide con il piano tangente al grafico.

Esempi: paraboloide, calotta sferica, semisfera

Sia $(\mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ una superficie in $\mathbb{R}^3$.

Diciamo che $(\mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ è regolare a pezzi se esistono $(\mathbf{\Sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_1), \ldots, (\mathbf{\Sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_k)$ superfici regolari con bordo tali che

- $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{\Sigma}_k$,
- $\mathbf{\Sigma}_i \cap \mathbf{\Sigma}_j = \partial\mathbf{\Sigma}_i \cap \partial\mathbf{\Sigma}_j$ per ogni $i \neq j$. $\leftarrow$ che cosa significa?

$\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_k$ si chiamano facce della superficie $(\mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$.

Chiamiamo bordo della superficie regolare a pezzi l'insieme

$$\partial\mathbf{\Sigma} := \overline{\{P \in \mathbf{\Sigma} \mid \exists |\, i \in \{1, \ldots, k\} \text{ t.c. } P \in \partial\mathbf{\Sigma}_i\}}.$$

Se $\partial\mathbf{\Sigma} = \emptyset$, diciamo che la superficie è chiusa.

Esempi: cilindro, sfera, cubo

Attraverso la nozione di superficie regolare a pezzi chiusa definiamo una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$. Diciamo che T è un dominio regolare se

- T è la chiusura di un insieme aperto, limitato e connesso;
- la frontiera di T è unione disgiunta di un numero finito di insiemi $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_m$ che sono sostegni di superfici regolari a pezzi chiuse.

Gli insiemi $\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_m$ si chiamano componenti di ∂T.

Esempi . . .

Se ciascuna delle componenti di ∂T è parametrizzata in modo che in ogni punto il versore normale n sia diretto verso l'esterno di T, diciamo che la frontiera di T è orientata positivamente e la denotiamo con ∂T^+.

Esempi . . .

APPENDICE

(VERIFICHE, RICHIAMI, ...)

Dimostrazione delle proprietà delle funzioni differenziabili

1. Per ipotesi, f è differenziabile in $\bar{x}$, quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(h)}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

che implica

$$\lim_{h \to 0} f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(h) = 0.$$

Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$0 \leq |df_{\bar{x}}(h)| = |\nabla f(\bar{x}) \cdot h| \overset{\substack{\text{disuguaglianza di Cauchy-Schwarz} \\ \downarrow}}{\vphantom{x}} \|\nabla f(\bar{x})\|_{\mathbb{R}^n} \, \|h\|_{\mathbb{R}^n}$$

quindi, per TCO:

$$\lim_{h \to 0} df_{\bar{x}}(h) = 0.$$

Per la regola della somma:

$$\lim_{h \to 0} f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) = 0,$$

ossia
$$\lim_{h\to 0} f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}),$$
che equivale a $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$. Quindi: f è continua in $\bar{x}$. $\square$

2. Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$ tale che $B_r(\bar{x}) \subset A$.

Per $h \in B_r(0) \setminus \{0\}$ definisco il rapporto incrementale
$$R(h) := \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - df_{\bar{x}}(h)}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}\,.$$
Per ipotesi: $\exists \ \lim\limits_{h\to 0} R(h) = 0$.

Fisso una direzione v e definisco $V := \{t\,v \mid t \in (-r, r)\}$ $\Big(\subset B_r(0)\Big)$.

Ovviamente la restrizione di R a V tende a 0 per $h \to 0$.

In simboli: $\exists \ \lim\limits_{h\to 0} R_{|V}(h) = \lim\limits_{t\to 0} R(t\,v) = 0$.

Esplicitando:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})-df_{\bar{x}}(t\,v)}{\|t\,v\|_{\mathbb{R}^n}} = 0$$

che equivale a

linearità di $df_{\bar{x}}$

$$(*) \qquad \exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})-t\,df_{\bar{x}}(v)}{|t|} = 0.$$

$\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1$

Osservo che

$$\frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})-t\,df_{\bar{x}}(v)}{|t|} = \mathrm{sign}(t)\,\frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})-t\,df_{\bar{x}}(v)}{t}$$

pertanto $(*)$ equivale a

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})-t\,df_{\bar{x}}(v)}{t} = 0$$

che equivale a

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\,v) - f(\bar{x})}{t} - df_{\bar{x}}(v) = 0$$

che equivale a

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\,v) - f(\bar{x})}{t} = df_{\bar{x}}(v).$$

A norma di definizione, ciò equivale a dire che f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v con derivata direzionale uguale a $df_{\bar{x}}(v)$. $\square$

Differenziabilità e differenziale delle funzioni di una variabile

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in A$.

$$f \text{ è derivabile in } \bar{x} \quad \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{esiste finito } \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} =: f'(\bar{x})$$

L'uguaglianza che definisce la derivata di f in $\bar{x}$ equivale a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) = 0$$

che equivale a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\, h}{h} = 0$$

che equivale a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\, h}{|h|} = 0$$

Dunque:

f è differenziabile in $\bar{x}$ e $df_{\bar{x}}(h) = f'(\bar{x})\, h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione del teorema del differenziale totale

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ denoto con $\mathrm{I}_{a,b}$ l'intervallo chiuso di estremi a e b.

Per ipotesi:
esiste $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{x}, \bar{y}) \subset A$, le derivate parziali f_x e f_y sono definite (almeno) in $B_r(\bar{x}, \bar{y})$ e sono continue in $(\bar{x}, \bar{y})$.

Fisso $(h, k) \in B_r(0,0) \setminus \{(0,0)\}$; osservo che $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) \in B_r(\bar{x}, \bar{y})$.
Definisco il rapporto incrementale:

$$R(h,k) := \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - f_x(\bar{x}, \bar{y})\,h - f_y(\bar{x}, \bar{y})\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.$$

Definisco $\varphi : \mathrm{I}_{\bar{x}, \bar{x}+h} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(t) = f(t, \bar{y}+k);$$

osservo che φ è derivabile in $\mathrm{I}_{\bar{x}, \bar{x}+h}$ con $\varphi'(t) = f_x(t, \bar{y}+k)$.

Per il teorema del valor medio (di AM I), esiste $\xi_h \in \mathrm{I}_{\bar{x},\bar{x}+h}$ tale che

$$\varphi(\bar{x}+h)-\varphi(\bar{x})=\varphi'(\xi_h)\,h$$

cioè

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y}+k)=f_x(\xi_h,\bar{y}+k)\,h. \tag{1}$$

Definisco $\psi:\mathrm{I}_{\bar{y},\bar{y}+k}\to\mathbb{R}$ tale che

$$\psi(t)=f(\bar{x},t);$$

osservo che ψ è derivabile in $\mathrm{I}_{\bar{y},\bar{y}+k}$ con $\psi'(t)=f_y(\bar{x},t)$.

Per il teorema del valor medio, esiste $\eta_k \in \mathrm{I}_{\bar{y},\bar{y}+k}$ tale che

$$\psi(\bar{y}+k)-\psi(\bar{y})=\psi'(\eta_h)\,k$$

cioè

$$f(\bar{x},\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})=f_y(\bar{x},\eta_k)\,k. \tag{2}$$

Sommando termine a termine (1) e (2) ottengo

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y}) = f_x(\xi_h,\bar{y}+k)\,h + f_y(\bar{x},\eta_k)\,k.$$

Posso riscrivere il rapporto incrementale:

$$R(h,k) = \frac{f_x(\xi_h,\bar{y}+k)\,h + f_y(\bar{x},\eta_k)\,k - f_x(\bar{x},\bar{y})\,h - f_y(\bar{x},\bar{y})\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\big(f_x(\xi_h,\bar{y}+k) - f_x(\bar{x},\bar{y})\big)\,h + \big(f_y(\bar{x},\eta_k) - f_y(\bar{x},\bar{y})\big)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Quindi:

$$0 \le |R(h,k)| \le \left|\frac{\big(f_x(\xi_h,\bar{y}+k) - f_x(\bar{x},\bar{y})\big)\,h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + \left|\frac{\big(f_y(\bar{x},\eta_k) - f_y(\bar{x},\bar{y})\big)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

$$\le \left|f_x(\xi_h,\bar{y}+k) - f_x(\bar{x},\bar{y})\right| + \left|f_y(\bar{x},\eta_k) - f_y(\bar{x},\bar{y})\right| .$$

Ricapitolando:

per ogni $(h,k) \in B_r(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ esistono $\xi_h \in \mathrm{I}_{\bar{x},\bar{x}+h}$ e $\eta_k \in \mathrm{I}_{\bar{y},\bar{y}+k}$ tali che

$$0 \le |R(h,k)| \le |f_x(\xi_h, \bar{y}+k) - f_x(\bar{x},\bar{y})| + |f_y(\bar{x},\eta_k) - f_y(\bar{x},\bar{y})| \,. \qquad (3)$$

Per $(h,k) \to (0,0)$:

- $\bar{x} + h$ tende a $\bar{x}$; essendo compreso tra $\bar{x}$ e $\bar{x}+h$, anche ξ_h tende a $\bar{x}$;
- $\bar{y} + k$ tende a $\bar{y}$.

$\downarrow$ f_x continua in $(\bar{x},\bar{y})$

Dunque $(\xi_h, \bar{y}+k)$ tende a $(\bar{x},\bar{y})$ e quindi $f_x(\xi_h, \bar{y}+k)$ tende a $f_x(\bar{x},\bar{y})$.

Pertanto: il primo addendo in (3) tende a 0.

Analogamente si deduce che anche il secondo addendo in (3) tende a 0.

Per il teorema di convergenza obbligata:

$$R(h,k) \to 0 \ \text{ per } (h,k) \to (0,0).$$

Derivata direzionale di una funzione vettoriale

Definizione per una funzione scalare

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Diciamo che f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v se esiste finito

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\,v) - f(\bar{x})}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$$

derivata di f in $\bar{x}$ nella direzione v

Definizione per una funzione vettoriale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Sia $\bar{x} \in \mathrm{int}(A)$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|v\|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Diciamo che f è derivabile in $\bar{x}$ nella direzione v se esiste ~~finito~~

$$\lim_{t \to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione vettoriale}}}{\frac{f(\bar{x} + t\,v) - f(\bar{x})}{t}} =: \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}^m}}{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})}$$

derivata di f in $\bar{x}$ nella direzione v

Dimostrazione del teorema del valor medio di Lagrange

Considero la parametrizzazione standard del segmento $[x, y]$:

$$r : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \text{ tale che } r(t) = x + t(y - x) \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

Osservo che r è di classe C^1 e $r'(t) = y - x$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Per ipotesi il segmento $[x, y]$ è contenuto nell'interiore di A, quindi in A; pertanto posso definire la funzione composta $g := f \circ r$.

Esplicitando: definisco $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$g(t) = f(r(t)) = f(x + t(y - x)) \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

g è composta di funzioni differenziabili, pertanto è differenziabile (che equivale a derivabile) e per ogni $t \in [0, 1]$:

$$g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot (y - x).$$

Applicando a g il teorema del valor medio per funzioni di una variabile, deduco che esiste $t_0 \in (0,1)$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)\,(1-0),$$

che equivale a

$$f(y) - f(x) = \nabla f(r(t_0)) \cdot (y - x).$$

Posto $z := r(t_0)$, la precedente uguaglianza diventa

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x);$$

per concludere basta osservare che ovviamente z appartiene al segmento $[x, y]$ e che è diverso da x e y perché t_0 è diverso da 0 e 1. $\square$

Dimostrazione della caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo

Fisso $x, y \in A$, con $x \neq y$.

Essendo aperto e connesso, l'insieme A è anche connesso per poligonali, quindi esiste una poligonale di estremi x e y contenuta in A.
Denoto con $x_1, x_2, \dots x_k$ (nell'ordine) i vertici di tale poligonale.

Per ipotesi f è derivabile parzialmente in A con derivate parziali identicamente nulle, e quindi continue, in A; dunque f è di classe C^1 In particolare, f è differenziabile su tutti i lati della poligonale, su ciascuno dei quali posso quindi applicare il teorema del valor medio.

Inizio dal segmento $[x_1, x_2]$: esiste $z_1 \in [x_1, x_2] \setminus \{x_1, x_2\}$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \nabla f(z_1) \cdot (x_2 - x_1).$$

Ovviamente $z_1 \in A$ e quindi, per ipotesi, $\nabla f(z_1) = 0$; dall'uguaglianza segue allora $f(x_2) - f(x_1) = 0$, cioè $f(x_1) = f(x_2)$.

Ripetendo il medesimo ragionamento sul segmento $[x_2, x_3]$, ottengo $f(x_2) = f(x_3)$ e, per transitività, $f(x_1) = f(x_3)$.

Iterando su tutti i segmenti che compongono la poligonale, ottengo

$$f(x_1) = f(x_k);$$

ricordando che gli estremi della poligonale sono proprio x e y, ottengo

$$f(x) = f(y).$$

Data l'arbitrarietà di x e y, l'uguaglianza precedente mostra che la funzione f è costante. $\square$

Funzioni di classe C^1 in un dominio

↑ chiusura di un insieme aperto

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.

Diciamo che f è una funzione di classe C^1 in $\overline{\Omega}$ se esistono

- un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\Omega} \subset A$,
- una funzione $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $g_{|\overline{\Omega}} = f$.

In tal caso, per ogni $x \in \partial\Omega$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ poniamo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$.

Osservazione

I valori delle derivate parziali di f nei punti di $\partial\Omega$ non dipendono dal prolungamento g considerato. Motivazione ...