a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica II

Funzioni tra spazi euclidei: limiti e continuità

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Funzioni tra spazi euclidei

Da ora in poi consideriamo funzioni che hanno dominio contenuto in $\mathbb{R}^n$ e codominio contenuto in $\mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Per $m = 1$ parliamo di funzioni reali (o scalari) di una o più variabili reali.

Per $m \geq 2$ parliamo di funzioni vettoriali di una o più variabili reali; se $n = m$ parliamo di campi vettoriali.

Esempio

Sia $n \geq 2$ e sia $i \in \{1, \ldots, n\}$.
La funzione $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che a ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associa la i-esima coordinata x_i è una funzione reale di n variabili reali, che si chiama proiezione sull'asse i-esimo oppure i-esima proiezione.

Notazione: in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ denoteremo le proiezioni con π_x, π_y e π_z.

Osservazione

Assegnare una funzione vettoriale $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ equivale ad assegnare una m-upla ordinata di funzioni reali definite in A.

Infatti, data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ possiamo comporre f con le proiezioni sugli assi, ottenendo m funzioni reali definite in A:

$$f_1 := \pi_1 \circ f \ , \ \dots \ , \ f_m := \pi_m \circ f \, .$$

Per ogni $x \in A$ il numero reale $f_i(x)$ è la i-esima componente del vettore $f(x)$; pertanto:

$$(*) \qquad f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Viceversa, data una m-upla ordinata $(f_1, \dots, f_m)$ di funzioni reali definite in A, possiamo definire tramite $(*)$ la funzione vettoriale $f : A \to \mathbb{R}^m$ che a ogni $x \in A$ associa il vettore di componenti $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Le funzioni $f_1, \dots, f_m$ che soddisfano $(*)$ si chiamano funzioni componenti di f.

Esempi

- La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(t) = \big(\cos(t),\ \sin(t)\big)$$

  è una funzione vettoriale di una variabile reale le cui componenti sono, nell'ordine, la funzione coseno e la funzione seno.

- La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x, y, z) = (x + y,\ x\,z^2,\ y + z^3)$$

  è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ le cui componenti sono, nell'ordine, le funzioni definite ponendo

$$f_1(x, y, z) = x + y\ , \quad f_2(x, y, z) = x\,z^2\ , \quad f_3(x, y, z) = y + z^3.$$

Osservazione (operazioni algebriche con funzioni vettoriali)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si definiscono le seguenti funzioni:

- $f + g := x \in A \mapsto f(x) + g(x)$ somma
- $f - g := x \in A \mapsto f(x) - g(x)$ differenza
- $\lambda f := x \in A \mapsto \lambda f(x)$ multiplo
- $\varphi f := x \in A \mapsto \varphi(x) f(x)$ prodotto per funzione reale
- $f \cdot g := x \in A \mapsto f(x) \cdot g(x)$ prodotto scalare

Nota

Per $m = 1$ si possono definire in modo naturale le funzioni rapporto $\dfrac{f}{g}$ e prodotto $f\,g$ (che coincide con la funzione prodotto scalare).

Limiti per funzioni tra spazi euclidei

Ricordiamo la definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale:

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\downarrow\ \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Sia $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione di* A *e sia* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diciamo che esiste il limite di $f(x)$ *per* x *che tende a* $\bar{x}$ *ed è uguale a* ℓ *se vale una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:*

(a) *per ogni successione* (x_k) *di elementi di* $A \setminus \{\bar{x}\}$ *che ha limite* $\bar{x}$, *la successione trasformata* $(f(x_k))$ *ha limite* ℓ;

(b) *per ogni* W_ℓ *intorno di* ℓ *esiste* $V_{\bar{x}}$ *intorno di* $\bar{x}$ *tale che per ogni* $x \in A \cap V_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$ *risulta* $f(x) \in W_\ell$.

In tal caso scriviamo $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$, *oppure* $f(x) \to \ell$ *per* $x \to \bar{x}$.

"Ingredienti":

- punto di accumulazione del dominio,
- successione avente limite in $\overline{\mathbb{R}}$ / intorno di un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$.

Consideriamo una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n + m \geq 3$.

altrimenti siamo nel caso già considerato $\uparrow$

Negli spazi euclidei, in quanto spazi metrici, sono disponibili le nozioni di punto di accumulazione, intorno di un punto e successione convergente; possiamo dunque estendere parola per parola la definizione di limite nel caso $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}^m$.

In sospeso: limite "all'infinito"
limite "infinito"

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A e sia $\ell \in \mathbb{R}^m$.

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell \quad \overset{\text{DEF}}{\underset{\text{succ.}}{\iff}} \quad \begin{array}{l} \text{per ogni successione } (x_k) \subset A \setminus \{\bar{x}\} \text{ che converge a } \bar{x} \\ \text{la successione trasformata } (f(x_k)) \text{ converge a } \ell \end{array}$$

$$\overset{\text{DEF}}{\underset{\text{intorni}}{\iff}} \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}^*_+ \ \text{ t.c.} \\ \forall\, x \in A \ \text{ t.c. } 0 < \|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \ : \ \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon \end{array}$$

Osservazione

Dalla "banalità del limite delle successioni vettoriali" segue immediatamente la "banalità del limite delle funzioni vettoriali".

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m \geq 2$.

Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A e $\ell \in \mathbb{R}^m$.

Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$, denotiamo con f_i e ℓ_i, rispettivamente, la i-esima componente di f e di ℓ.

Allora:

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \bar{x}} f_i(x) = \ell_i \quad \text{per ogni } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Conseguenza:

possiamo concentrare la nostra attenzione sul calcolo dei limiti di funzioni reali di più variabili reali.

Esempi

Verificare i seguenti limiti attraverso la definizione:

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\sin\left(\frac{1}{x+y}\right) = 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\,x^3+2\,x^2+2\,y^2}{x^2+y^2} = 2$$

- $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)} = 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\,y}{x^4+y^2} = 0$$ $\leftarrow$ tenere presente che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$: $|a\,b| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

- $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x+y)\,z^4}{x^4+y^2+z^4} = 0$$

Per parlare di funzione convergente "all'infinito", supponiamo che f sia definita in un insieme illimitato A.

Formuliamo la definizione mediante le successioni. $\leftarrow$ per esercizio: con gli intorni

Sia $\ell \in \mathbb{R}^m$.

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty} f(x) = \ell \overset{\text{DEF}}{\underset{\text{succ.}}{\iff}} \begin{array}{l} \text{per ogni succ. } (x_k) \subset A \text{ t.c. } \|x_k\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty \\ \text{la succ. trasformata } (f(x_k)) \text{ converge a } \ell \end{array}$$

Osservazioni

- L'esistenza di almeno una successione $(x_k) \subset A$ tale che $\|x_k\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty$ è garantita dal fatto che A è un insieme illimitato. Giustificare ...
- Condizione sufficiente affinché una successione diverga in norma è che almeno una delle sue componenti diverga in valore assoluto.
  È anche necessaria? No! Esempio ...

Nota

Per $n = 1$, oltre al limite per $|x| \to +\infty$, ha senso considerare anche il limite per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$, a seconda che A sia illimitato superiormente oppure inferiormente. Formulare la definizione ...

Ovviamente, anche per i limiti all'infinito possiamo concentrarci sul calcolo del limite di funzioni reali.

Esempio

Verificare attraverso la definizione: $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0$

Notazione: dove non c'è possibilità di equivoco, scriviamo $\| \cdot \|$ invece di $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^2}$ oppure $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^3}$.

Concludiamo con la definizione di “limite infinito”, o meglio di funzione divergente in norma. Formuliamo le definizioni mediante le successioni.

$\uparrow$
per esercizio:
con gli intorni

Se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione di A:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = +\infty \underset{\text{succ.}}{\overset{\text{DEF}}{\iff}} \text{per ogni succ. } (x_k) \subset A \setminus \{\bar{x}\} \text{ che converge a } \bar{x} \text{ si ha } \|f(x_k)\|_{\mathbb{R}^m} \to +\infty$$

Se A è un insieme illimitato:

$$\lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = +\infty \underset{\text{succ.}}{\overset{\text{DEF}}{\iff}} \forall\, (x_k) \subset A \ \text{ t.c. } \|x_k\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty : \ \|f(x_k)\|_{\mathbb{R}^m} \to +\infty$$

Nota

Per $m = 1$, oltre che di funzione divergente in norma (cioè in valore assoluto) ha senso parlare di funzione divergente positivamente oppure divergente negativamente. Formulare le definizioni ...

Esempi

Verificare i seguenti limiti attraverso la definizione:

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4} = +\infty$$

- $$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = +\infty$$

- $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left\| \left(\frac{1}{x^2},\ 3+y\,z^3,\ x^2\,y \right) \right\| = +\infty$$

Estensione di risultati noti dal corso di AM I

Proposizione

Siano $(a_k), (b_k) \subset \mathbb{R}^n$, $(c_k) \subset \mathbb{R}$. Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $a_k \to a$, $b_k \to b$ e $c_k \to c$, allora:

- $a_k + b_k \longrightarrow a + b$ regola della somma
- $a_k - b_k \longrightarrow a - b$ regola della differenza
- $\lambda\, a_k \longrightarrow \lambda\, a$ regola del multiplo
- $c_k\, a_k \longrightarrow c\, a$ regola del prodotto
- $a_k \cdot b_k \longrightarrow a \cdot b$ regola del prodotto scalare

Dimostrazione: basta tenere presente la "banalità del limite delle successioni vettoriali" e applicare alle singole componenti le regole dei limiti di successioni di numeri reali.

Avendo definito i limiti di funzioni tra spazi vettoriali euclidei mediante successioni, si giustificano facilmente le seguenti affermazioni.

- Le regole algebriche sui limiti di successioni si estendono banalmente alle funzioni convergenti.

  Per funzioni a valori in $\mathbb{R}$, che possono divergere positivamente o negativamente, le regole algebriche si generalizzano con le medesime precauzioni adottate per le funzioni reali di una variabile reale.

  $\uparrow$ forme di indecisione ...

- I teoremi di permanenza del segno e delle disuguaglianze e i teoremi di convergenza e divergenza obbligata si estendono alle funzioni reali di più variabili reali.

- Il teorema sul limite della funzione composta si estende senza eccezioni.

Funzioni continue tra spazi euclidei

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$. Sia $\bar{x} \in A$.
Ricordiamo la formulazione della continuità mediante successioni:

f è continua in $\bar{x}$ se e solo se per ogni successione $(x_k) \subset A$ che converge a $\bar{x}$, la successione trasformata $(f(x_k))$ converge a $f(\bar{x})$.

Esempi

- La funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  non è continua in $(0,0)$.
- Le funzioni costanti sono continue.
- Le funzioni proiezioni sugli assi sono funzioni continue.

E la norma euclidea?

In aggiunta alla proprietà su "continuità e composizione funzionale", valida per funzioni continue tra spazi metrici arbitrari, per funzioni tra spazi euclidei valgono le seguenti proprietà:

1. Banalità della continuità delle funzioni vettoriali

   Una funzione vettoriale è continua (in un punto, in un insieme) se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

2. Continuità e operazioni algebriche

   Con le notazioni dell'osservazione di pagina 4, se f, g e φ sono continue (in un punto, in un insieme), lo sono anche tutte le funzioni ottenute attraverso le operazioni algebriche.

Esempio

Stabilire se le funzioni a pagina 3 sono continue nei rispettivi domini.

Osservazione

Le funzioni polinomiali e le funzioni razionali sono continue nei rispettivi domini.

$\uparrow$ funzioni reali di più variabili reali ottenute sommando un numero finito di multipli di prodotti di proiezioni sugli assi

$\uparrow$ rapporti di funzioni polinomiali

Osservazione (caratterizzazione della continuità mediante i limiti)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e sia $\bar{x} \in A$.

È facile riconoscere che:

- se $\bar{x}$ è un punto isolato di A, allora f è continua in $\bar{x}$;
- se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di A, allora:

  f è continua in $\bar{x}$ se e solo se $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$.

Pertanto, per una funzione continua gli unici limiti "significativi" sono

- i limiti per x che tende a $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\bar{x}$ punto di accumulazione del dominio non appartenente al dominio;
- i limiti all'infinito (se il dominio è illimitato).

Esempio

Individuare i limiti significativi della funzione $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

Come calcolare i limiti per funzioni reali di più variabili

$\uparrow$ non restrittivo (banalità del limite)

Osservazione preliminare

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x}$ un punto di accumulazione di A.

Se esiste $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) =: \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora: **ogni restrizione** di f per la quale abbia senso calcolare il limite per $x \to \bar{x}$ ha lo stesso limite.

In simboli: per ogni $B \subset A$ tale che $\bar{x} \in Dr(B)$ risulta $\lim_{x \to \bar{x}} f_{|B}(x) = \ell$.

Strategia conseguente:

- se riesco a individuare una restrizione di f che non ha limite per $x \to \bar{x}$, oppure due restrizioni di f che hanno limiti diversi per $x \to \bar{x}$, allora deduco che f non ha limite per $x \to \bar{x}$;
- se, per x che tende a $\bar{x}$, una o più restrizioni producono il limite ℓ, allora congetturo che f abbia limite ℓ e lo verifico tramite la definizione di limite.

$\uparrow$

come negli esempi

Nota: per i limiti all'infinito valgono analoghe considerazioni.

Esempi

Individuare e calcolare (se esistono) i limiti significativi delle seguenti funzioni:

- $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$
- $f(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^2-y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{x^3\,y^2}{4\,x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x\,y)}{x^2+y^2}$

Nota

Per calcolare i limiti di funzioni reali di due variabili può essere utile ricorrere alle coordinate polari. Esempi . . .

Esempi

- Studiare la continuità della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Stabilire se la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette estremi globali nel proprio dominio.

Due classi speciali di funzioni continue

1. Curve in $\mathbb{R}^n$

Siano $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $r : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, $\gamma := r(\mathrm{I})$.

La coppia (γ, r) si chiama curva in $\mathbb{R}^n$.

L'insieme γ si chiama sostegno della curva; la funzione r si chiama parametrizzazione di γ. Diremo anche: parametrizzazione della curva

L'intervallo I si chiama intervallo dei parametri.

Esempio

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y$. La funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto x + t\,(y - x)$ definisce una curva avente come sostegno la retta passante per x e y.

Nota

Il sostegno di una curva è sempre un insieme connesso; se l'intervallo dei parametri è compatto, il sostegno è anche compatto. Perché?

Esempi

- Con le notazioni dell'esempio precedente, le funzioni

$$t \in [0, +\infty) \mapsto x + t\,(y - x) \qquad\qquad t \in [0, 1] \mapsto x + t\,(y - x)$$

definiscono due curve aventi come sostegno, rispettivamente, la semi-retta uscente da x e passante per y e il segmento congiungente x e y.

- Le funzioni

$$t \in [0, 2\,\pi] \mapsto (\cos(t),\ \sin(t)) \qquad t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(t),\ \sin(t))$$

$$t \in [0, 3\,\pi] \mapsto (\cos(t),\ \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\,\pi] \mapsto (\sin(t),\ \cos(t))$$

sono tutte parametrizzazioni dell'insieme

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\Big\} =: S^1$$ circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$

- La funzione $t \in [0, \pi] \mapsto (\cos(t),\ \sin(t))$ è una parametrizzazione dell'insieme $S^1 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ metà superiore della circonferenza unitaria

Osservazione

Assegnare il sostegno γ non determina univocamente una curva; tuttavia, se sottintendiamo una parametrizzazione "naturale", possiamo parlare di "curva γ". Esempi ...

Viceversa, una curva è univocamente individuata quando se ne assegna la parametrizzazione r. Ciò equivale ad assegnare le equazioni parametriche

$$x_1 = r_1(t)\,,\ \ldots\ , x_n = r_n(t), \qquad t \in \mathrm{I}$$

dove $r_1, \ldots, r_n$ sono le componenti di r.

Nota

Il sostegno di una curva ne racchiude le informazioni geometriche; si può interpretare come la traiettoria descritta da una particella che si muove nello spazio.

La parametrizzazione racchiude le informazioni cinematiche della curva; si può interpretare come la legge oraria del moto.

Osservazione

Essendo un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'intervallo dei parametri è orientato; la sua orientazione induce una orientazione (o verso di percorrenza) sul sostegno della curva.

Esempio

Le funzioni
$$r_1 := t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t),\ \sin(t))$$
$$r_2 := t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(2\pi - t),\ \sin(2\pi - t))$$

sono parametrizzazioni della circonferenza unitaria S^1 su cui inducono orientazioni opposte.

Sia (γ, r) una curva in $\mathbb{R}^n$ con intervallo dei parametri I.

- Se I ha minimo oppure massimo, $r(\min \mathrm{I})$ e $r(\max \mathrm{I})$ si chiamano estremi della curva.
- Diciamo che la curva è chiusa se $\mathrm{I} = [a, b]$ e $r(a) = r(b)$.

  Significato?
- Diciamo che la curva è semplice se, presi due elementi distinti $t_1, t_2 \in \mathrm{I}$, di cui almeno uno interno a I, si ha $r(t_1) \neq r(t_2)$.

  Significato?
- Se il sostegno γ è contenuto in un piano, diciamo che la curva è piana.

Esempi

Individuare gli estremi delle curve considerate a pagina 22 e 23; stabilire se sono chiuse, semplici, piane.

Nota

Una curva piana chiusa e semplice si chiama curva di Jordan.

Il sostegno di una curva di Jordan è frontiera di due sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}^2$, dei quali uno è limitato (interno della curva) e l'altro è illimitato (esterno della curva). Risultato intuitivo, ma dimostrazione non banale!

Esempio

Si stabilisca se la curva di parametrizzazione

$$r(t) = \left((t+1)^2,\ t^2(t+2)\right), \qquad t \in [-2, 1]$$

è chiusa e se è semplice e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

Osservazione (curva grafico)

Sia $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e sia $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
La funzione vettoriale

$$r := t \in \mathrm{I} \mapsto \big(t,\ f(t)\big) \in \mathbb{R}^2$$

è continua e la sua immagine coincide con il grafico di f; dunque r è una parametrizzazione del grafico di f.

La curva piana corrispondente si chiama curva grafico o curva cartesiana; è una curva semplice non chiusa.

Esempi ...

❷ Superfici in $\mathbb{R}^3$ — In generale (ma non in questo corso): ipersuperfici in $\mathbb{R}^n$

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$.

Diciamo che K è un insieme di parametri se esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e connesso tale che $A \subseteq K \subseteq \overline{A}$.

Esempi . . .

Siano $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme di parametri, $\boldsymbol{\sigma} : K \to \mathbb{R}^3$ una funzione continua e $\boldsymbol{\Sigma} := \boldsymbol{\sigma}(K)$.

La coppia $(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ si chiama superficie in $\mathbb{R}^3$.

L'insieme $\boldsymbol{\Sigma}$ si chiama sostegno della superficie; la funzione $\boldsymbol{\sigma}$ si chiama parametrizzazione di $\boldsymbol{\Sigma}$.

Confronto con la nozione di curva . . .

Proprietà topologiche del sostegno . . .

Avvertenza: parlando di superfici, assumeremo tacitamente che la parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfi la seguente condizione, formalmente identica a quella che appare nella definizione di curva semplice:

$(*)$ presi due elementi distinti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in K$, di cui almeno uno interno a K, si ha $\boldsymbol{\sigma}(u_1, v_1) \neq \boldsymbol{\sigma}(u_2, v_2)$.

Significato?
Formulazione alternativa?

Osservazione (analoga a quella per le curve)

Assegnare il sostegno $\boldsymbol{\Sigma}$ non determina univocamente una superficie. Tuttavia, se sottintendiamo una parametrizzazione "naturale", possiamo parlare di "superficie $\boldsymbol{\Sigma}$".

In genere, definiremo una superficie assegnando la parametrizzazione $\boldsymbol{\sigma}$ oppure, equivalentemente, assegnando le equazioni parametriche

$$x = \sigma_1(u.v)\,, \quad y = \sigma_2(u,v)\,, \quad z = \sigma_3(u,v), \qquad (u,v) \in K$$

dove σ_1, σ_2, σ_3 sono le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$.

Osservazione (superficie grafico)

Siano $K \subset \mathbb{R}^2$ insieme di parametri e $f : K \to \mathbb{R}$ funzione continua.

La funzione vettoriale

$$\boldsymbol{\sigma} := (u, v) \in K \mapsto (u,\ v,\ f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

è continua e la sua immagine coincide con il grafico di f; dunque $\boldsymbol{\sigma}$ è una parametrizzazione del grafico di f.

Evidentemente $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfa la condizione $(*)$ di pagina 30.

La superficie corrispondente si chiama superficie grafico oppure superficie cartesiana.

Esempi

Parametrizzare e rappresentare graficamente le superfici corrispondenti alle seguenti funzioni:

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad (x,y) \in \overline{B}_2(0,0)$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ $\qquad (x,y) \in \overline{B}_r(0,0)$ semi-superficie sferica
- $f(x,y) = 1 - x - y$ $\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$ piano

Esempi

Richiamo: coordinate cilindriche, sferiche

- Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$. La funzione $\boldsymbol{\sigma} : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\theta, z) = (r \cos(\theta),\ r \sin(\theta),\ z)$$

definisce la superficie cilindrica, che ha come sostegno la "superficie laterale" di un cilindro avente come direttrice la circonferenza di centro l'origine e raggio r contenuta nel piano xy e generatrici parallele all'asse z.

Cosa si ottiene restringendo $\boldsymbol{\sigma}$ a $[0, 2\pi] \times [0, h]$ con $h \in (0, +\infty)$?

- Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$. La funzione $\boldsymbol{\sigma} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\boldsymbol{\sigma}(\varphi, \theta) = (r \sin(\varphi) \cos(\theta),\ r \sin(\varphi) \sin(\theta),\ r \cos(\varphi))$$

definisce la superficie sferica, che ha come sostegno la sfera di centro l'origine e raggio r.

Cosa si ottiene restringendo $\boldsymbol{\sigma}$ a $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$?

APPENDICE

(VERIFICHE, RICHIAMI, ...)

Limiti di funzioni di due variabili mediante coordinate polari

Sia $f : B_r(\bar{x}, \bar{y}) \setminus \{(\bar{x}, \bar{y})\} \to \mathbb{R}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$.

Introduciamo coordinate polari di centro $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$x = \bar{x} + \rho \cos\theta, \quad y = \bar{y} + \rho \sin\theta$$

e definiamo

$$g(\rho, \theta) := f(\bar{x} + \rho \cos\theta,\ \bar{y} + \rho \sin\theta)$$

con $\rho \in (0, r)$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x, y) = \ell \quad \overset{\text{DEF}}{\underset{\text{intorni}}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \ \text{ t.c. } 0 < \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

Equivalentemente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \text{ t.c. } 0 < \|((\rho \cos\theta,\ \rho \sin\theta)\| < \delta \implies |g(\rho, \theta) - \ell| < \varepsilon$$

Equivalentemente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; 0 < \rho < \delta, \;\; \theta \in [0, 2\pi] \implies |g(\rho, \theta) - \ell| < \varepsilon$$

Equivalentemente:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \text{t.c.} \;\; 0 < \rho < \delta \implies \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |g(\rho, \theta) - \ell| < \varepsilon$$

In conclusione:

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x, y) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |g(\rho, \theta) - \ell| = 0.$$