a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica II

Spazi metrici

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Spazi metrici

Sia X un insieme qualsiasi (non vuoto).
Una metrica o distanza in X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

D1 $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

D2 $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$;

D3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$. disuguaglianza triangolare

La coppia (X, d) si chiama spazio metrico; X si chiama sostegno dello spazio metrico.

Nota: dalla disuguaglianza triangolare si deduce la seconda disuguaglianza triangolare:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{per ogni } x, y, z \in X.$$

Verifica . . .

Esempio (metrica del valore assoluto)

Ricordiamo che in $\mathbb{R}$ si definisce la funzione valore assoluto ponendo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, +\infty) \\ -x & \text{se } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

la quale soddisfa le seguenti proprietà:

- per ogni $x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \iff x = 0$
- per ogni $x \in \mathbb{R}$: $|-x| = |x|$
- per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $|x\,y| = |x|\,|y|$
- per ogni $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$

La funzione d definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ponendo

$$d(x, y) := |x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

è una metrica in $\mathbb{R}$, detta metrica del valore assoluto. *Verifica . . .*

Esempi (metriche in $\mathbb{R}^n$) $\leftarrow$ per $n = 1$ coincidono con la metrica del valore assoluto

Consideriamo $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fattori}}$, insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

La funzione $d_{\mathbb{R}^n}$, definita ponendo

$$d_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

è una metrica in $\mathbb{R}^n$, detta metrica euclidea.

Verifichiamo **D1** *e* **D2**, *rinviando la verifica di* **D3**

Sono metriche in $\mathbb{R}^n$ anche le funzioni definite ponendo

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad\qquad d_{\max}(x, y) := \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

metrica del reticolo (o del taxi) — metrica del massimo

Verifica . . .

Esempio (spazio metrico discreto)

Sia X un qualsiasi insieme con almeno due elementi.

La funzione definita in $X \times X$ ponendo

$$d_{DIS}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una metrica, detta metrica discreta.

Verifica ...

Nel corso di AM III verranno trattati ulteriori spazi metrici, i cui elementi sono **funzioni**.

Elementi di topologia in uno spazio metrico

In quel che segue (X, d) è uno spazio metrico.

Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

L'insieme

$$B_r(x_0) := \left\{ x \in X \mid d(x, x_0) < r \right\}$$

si chiama intorno sferico (o palla) di centro x_0 e raggio r.

Esempi

Descrivere gli intorni sferici:

- in uno spazio metrico discreto,
- in $\mathbb{R}$ (sottinteso: con la metrica del valore assoluto),
- in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla metrica euclidea, alla metrica del reticolo e alla metrica del massimo. Intorni "incapsulabili" ...

Siano $E \subseteq X$, $x_0 \in X$.

Diciamo che x_0 è un

- punto interno a E se esiste un intorno sferico di x_0 contenuto in E;
- punto esterno a E se è interno a E^c (il complementare di E), cioè se esiste un intorno sferico di x_0 contenuto in E^c;
- punto di frontiera per E se non è interno né esterno a E, cioè se ogni intorno sferico di x_0 contiene sia punti di E che punti di E^c;
- punto di accumulazione per E se ogni intorno sferico di x_0 contiene almeno un elemento di E <u>diverso da x_0</u>. $\leftarrow$ Superfluo se $x_0 \notin E$.

Esempio: intervalli di $\mathbb{R}$ ...

Osservazioni

1. Ogni punto interno è di accumulazione.
2. Un punto è di frontiera per E se e solo se è di frontiera per E^c.
3. Un punto di frontiera non è necessariamente di accumulazione e viceversa.

Sia $E \subseteq X$.

- L'insieme dei punti interni a E si chiama interno o interiore di E e si denota con $\mathrm{int}(E)$ (oppure $\mathring{E}$). Nota: $\mathrm{int}(E) \subseteq E$
- L'insieme dei punti di frontiera per E si chiama frontiera di E e si denota con ∂E. Nota: $\partial E = \partial E^c$
- L'insieme dei punti di accumulazione per E si chiama derivato di E e si denota con $Dr(E)$.

  Nota: per l'osservazione 3 della pagina precedente, frontiera e derivato di un insieme sono insiemi diversi, non confrontabili per inclusione.

  Tuttavia: $E \cup \partial E = E \cup Dr(E)$. Verifica ...
- L'insieme unione di E e della sua frontiera, o equivalentemente di E e del suo derivato, si chiama chiusura di E e si denota con $\overline{E}$.

Diciamo che l'insieme E è aperto se vale una, e quindi ciascuna, delle seguenti proprietà tra loro equivalenti:

1. tutti gli elementi di E sono punti interni a E,
2. $E = \text{int}(E)$,
3. $E \cap \partial E = \emptyset$.

Diciamo che l'insieme E è chiuso se vale una, e quindi ciascuna, delle seguenti proprietà tra loro equivalenti:

1. E contiene tutti i suoi punti di accumulazione,
2. $E = \overline{E}$,
3. $\partial E \subseteq E$.

Osservazione

Un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso.

Esempio

In uno spazio metrico discreto:

- identificare la frontiera di un qualsiasi sottoinsieme;
- identificare gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi.

Proprietà

$\downarrow$??

- Le unioni qualsiasi e le intersezioni finite di insiemi aperti sono insiemi aperti; le intersezioni qualsiasi e le unioni finite di insiemi chiusi sono insiemi chiusi. *Verifica . . .*

  $\uparrow$??

- L'interiore di un insieme è il più grande insieme aperto contenuto nell'insieme; la chiusura di un insieme è il più piccolo insieme chiuso che contiene l'insieme.

  Nota: "più grande" e "più piccolo" rispetto alla relazione di inclusione.

Esempi (da ricordare)

Siano $x_0 \in X$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'intorno sferico $B_r(x_0)$ è aperto.

verificare utilizzando la disug. triangolare

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) > r\}$ è aperto.

verificare utilizzando la seconda disug. triangolare

- L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ è chiuso.

$\uparrow =: \overline{B}_r(x_0)$ intorno sferico chiuso (o palla chiusa)

- Gli insiemi $\{x \in X \mid d(x, x_0) \geq r\}$ e $\{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ sono chiusi.

$\uparrow =: S_r(x_0)$ sfera

Osservazione

$\downarrow$ omettiamo la verifica

Nello spazio metrico euclideo la sfera coincide con la frontiera della palla aperta (anche della palla chiusa e quindi dei rispettivi complementari); l'uguaglianza non è garantita in uno spazio metrico generico. Esempio?

Insiemi limitati

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $E \subseteq X$.

Diciamo che E è limitato se esiste una palla (chiusa) che contiene E, cioè se esistono $\bar{x} \in X$ e $r \in \mathbb{R}^*_+$ tali che $d(x, \bar{x}) \leq r$ per ogni $x \in E$.

Se E non è limitato diciamo che è illimitato.

Osservazioni

- Le palle aperte e le palle chiuse sono insiemi limitati.
- Un insieme contenuto in un insieme limitato è a sua volta limitato.
- L'unione di un numero finito di insiemi limitati è un insieme limitato.
- La chiusura e la frontiera di un insieme limitato sono insiemi limitati.
  E se l'insieme è illimitato?
- In uno spazio metrico discreto, tutti gli insiemi sono limitati. Perché?

Sottospazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$.

Sia d^A la restrizione della metrica d all'insieme $A \times A$.

- La funzione d^A è una metrica in A, detta metrica indotta in A.
- La coppia (A, d^A) è uno spazio metrico, che chiamiamo sottospazio metrico di (X, d).

Osservazione

Denotando con $B_r^A(x_0)$ l'intorno sferico di centro x_0 e raggio r nel sottospazio metrico (A, d^A), risulta: $B_r^A(x_0) = A \cap B_r(x_0)$.

Da questo segue che i sottoinsiemi aperti/chiusi di A sono tutti e soli gli insiemi ottenuti intersecando A con i sottoinsiemi aperti/chiusi di X.

Esempi ...

Successioni convergenti

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Sia (x_n) una successione di elementi di X.

Da ora in poi: "intorno" sta per "intorno sferico"

Diciamo che (x_n) converge nello spazio metrico (X, d) se esiste $x \in X$ soddisfacente una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti:

(a) ogni intorno di x contiene x_n definitivamente. — definizione topologica

(b) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ risulta $d(x_n, x) < \varepsilon$ definitivamente — "traduzione" di (a)

(c) $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$ — definizione metrica

In tal caso, diciamo che (x_n) converge a x, oppure che x è il limite di (x_n), e scriviamo $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ oppure $x_n \to x$.

↑ ??

Giustifichiamo l'uso dell'articolo determinativo “il” nella pagina precedente.

Lemma (proprietà di separazione)

In qualsiasi spazio metrico, elementi distinti ammettono intorni disgiunti.

Dimostrazione . . .

Proposizione (unicità del limite)

In qualsiasi spazio metrico, una successione non può convergere a due limiti distinti.

Dimostrazione . . .

Esercizio

Esplicitare la nozione di successione convergente

- in uno spazio metrico discreto;
- in $\mathbb{R}$ con la metrica del valore assoluto;
- in $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea. $\leftarrow$ del reticolo, del massimo

Salvo avviso contrario, d'ora in poi sottintenderemo che in $\mathbb{R}^n$ sia assegnata la metrica euclidea.

Ci proponiamo di ricondurre le nozioni di limitatezza e di convergenza per successioni in $\mathbb{R}^n$ alle corrispondenti nozioni per successioni in $\mathbb{R}$.

Lemma

Per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$|x_j - y_j| \ \leq \ d_{\mathbb{R}^n}(x, y) \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Verifica . . .

Proposizione

Siano $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, denotiamo con $x_{k,j}$ e x_j, rispettivamente, la j-esima componente di x_k e di x.

1. La successione (x_k) è limitata se e solo se la successione di numeri reali $(x_{k,j})$ è limitata per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$.
2. La successione (x_k) converge a x in $\mathbb{R}^n$ se e solo se la successione di numeri reali $(x_{k,j})$ converge a x_j in $\mathbb{R}$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Verifica . . . 2 : banalità del limite delle successioni vettoriali

La precedente proposizione consente di estendere a $\mathbb{R}^n$ un importante risultato, già noto in $\mathbb{R}$:

Teorema (di Bolzano-Weierstrass)

Ogni successione limitata di elementi di $\mathbb{R}^n$ ammette una successione estratta convergente.

Dimostrazione ...

Successioni di Cauchy

Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia (x_n) una successione di elementi di X.

Diciamo che (x_n) è una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

cioè

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ risulta $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ definitivamente.

Osservazione

Ogni successione convergente $\underset{\downarrow \text{ perché?}}{}$è anche una successione di Cauchy, ma non è vero il viceversa.

Esempio

La successione identica è di Cauchy ma non converge in $\mathbb{R}$ munito della metrica definita ponendo $d_*(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

Proposizione (proprietà delle successioni di Cauchy)

Sia (x_n) una successione di Cauchy nello spazio metrico (X, d).
Allora:

1. (x_n) è limitata;
2. se esiste una successione estratta da (x_n) convergente a un certo x, anche (x_n) converge a x.

Dimostrazione . . .

Osservazione

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$.
Ogni successione di elementi di A è di Cauchy in (A, d^A) se e solo se è di Cauchy in (X, d). Ovvio!

Spazi metrici completi

Diciamo che uno spazio metrico (X, d) è completo se tutte le successioni di Cauchy sono anche convergenti.

Esempio

basta identificare le successioni di Cauchy

Ogni spazio metrico discreto è completo.

Teorema (completezza dello spazio metrico euclideo)

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ è completo rispetto alla metrica euclidea.

In particolare: $\mathbb{R}$ è completo rispetto alla metrica del valore assoluto.

Nota: non lo è rispetto alla metrica d_* definita a pag. 19.

Dimostrazione . . .

Commento sulle nozioni di "completezza di $\mathbb{R}$" viste in precedenza . . .

Spazi metrici compatti

Diciamo che uno spazio metrico (X, d) è sequenzialmente compatto, oppure compatto per successioni se da ogni successione di elementi di X si può estrarre una sottosuccessione convergente in (X, d).

Nota: si può introdurre una nozione più generale di compattezza, basata esclusivamente sulla nozione di insieme aperto e di unione insiemistica; negli spazi metrici tale nozione è equivalente a quella espressa mediante le successioni. Poiché nei corsi di Analisi Matematica II e III trattiamo solo spazi metrici, possiamo semplificare la terminologia omettendo le locuzioni "sequenzialmente" o "per successioni".

Esempio

Uno spazio metrico discreto è compatto se e solo se il suo sostegno è un insieme finito. Giustificare . . .

Proposizione (compattezza e completezza)

Ogni spazio metrico compatto è anche uno spazio metrico completo.

Dimostrazione . . .

Osservazione

Il viceversa della proposizione precedente è falso, cioè esistono spazi metrici completi che non sono compatti.

Per esempio, basta considerare uno spazio metrico discreto avente come sostegno un insieme infinito.

Completezza e compattezza nei sottospazi metrici

Ci proponiamo di dimostrare che le proprietà di completezza e compattezza si trasferiscono ai sottospazi metrici aventi per sostegno un insieme chiuso. Per farlo servono alcuni risultati preliminari.

Proposizione (caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi)

Siano (X, d) uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $x \in X$.

1. $x \in Dr(E)$ se e solo se esiste una successione di elementi di $E \setminus \{x\}$ convergente a x.
2. $x \in \overline{E}$ se e solo se esiste una successione di elementi di E convergente a x.
3. E è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni di elementi di E convergenti in (X, d). Esplicitare ...

Dimostrazione ...

Osservazione (convergenza nei sottospazi)

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$.

- Ogni successione di elementi di A che converge in (A, d^A) converge anche in (X, d) (al medesimo limite).
- Se una successione di elementi di A converge in (X, d), non è detto che essa converga in (A, d^A). Esempio ...
- Se A è un sottoinsieme chiuso di X, allora ogni successione di elementi di A converge in (A, d^A) se e solo se converge in (X, d).

Teorema (trasferimento di proprietà ai sottoinsiemi chiusi)

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme chiuso di X.

1. Se (X, d) è completo, allora (A, d^A) è completo.
2. Se (X, d) è compatto, allora (A, d^A) è compatto.

Dimostrazione ...

Convenzione: se (X, d) è uno spazio metrico e il sottospazio metrico (A, d^A) è completo/compatto, diremo che l'insieme A è completo/compatto in X.

Proposizione (completezza, compattezza, chiusura e limitatezza)
Sia (X, d) uno spazio metrico qualsiasi e sia $A \subset X$.

1. Se A è completo, allora A è chiuso.
2. Se A è compatto, allora A è chiuso e limitato.

Dimostrazione . . .

Negli spazi metrici euclidei vale il viceversa di 2:

Teorema (di Heine-Borel)
Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione . . .

Osservazione

In un generico spazio metrico gli insiemi chiusi e limitati non sono necessariamente compatti.

Per esempio, in uno spazio metrico discreto tutti gli insiemi sono sia chiusi che limitati; tuttavia, sono compatti se e solo se sono finiti.

Un esempio più interessante verrà presentato in AM III.

Nota

Come è noto dal corso di AM I, esistono successioni di numeri razionali che hanno come limite un numero reale non razionale. Esempi?

Per la caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi, ciò equivale a dire che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è chiuso in $\mathbb{R}$; dalla parte 1 della proposizione precedente segue allora che $\mathbb{Q}$, munito della metrica del valore assoluto, non è uno spazio metrico completo.

Da qui deriva la necessità di "completarlo", aggiungendo i numeri irrazionali...

Spazi metrici connessi

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Diciamo che X è sconnesso se X è unione di due insiemi aperti, non vuoti e disgiunti; diciamo che X è connesso se non è sconnesso.

Convenzione: se $A \subset X$, diremo che l'insieme A è connesso in X se il sotto-spazio metrico (A, d^A) è connesso.

Esempi

- Uno spazio metrico discreto è connesso se e solo se è un singoletto (cioè è un insieme costituito da un solo elemento).
- Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.
  Richiede una dimostrazione, che omettiamo.

In $\mathbb{R}^n$ si può definire una nozione alternativa di connessione; per presentarla occorrono alcune nozioni preliminari.

Alcuni sottoinsiemi particolari di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo che gli elementi di $\mathbb{R}^n$ sono *n*-uple ordinate di numeri reali.
Ha dunque senso definire

- l'operazione di addizione in $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

  per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;

- l'operazione di prodotto esterno in $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\lambda\, x := (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n)$$

  per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dalle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione tra numeri reali derivano corrispondenti proprietà delle operazioni definite in $\mathbb{R}^n$.

Più dettagli nel corso di Geometria ...

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $a \neq b$.

Chiamiamo segmento di estremi a e b l'insieme

$$[a, b] := \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1-t)\, a + t\, b\,, \quad t \in [0,1] \right\}.$$
$$= a + t\,(b-a)$$

Nota: se $n = 1$ e $a < b$, il segmento (chiuso) di estremi a e b coincide con l'intervallo chiuso di estremi a e b; ciò giustifica la notazione utilizzata.

Siano $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$.

Chiamiamo poligonale di vertici $x_1, x_2, \ldots x_k$ (nell'ordine) l'unione dei segmenti $[x_1, x_2]\,,\ [x_2, x_3]\,,\ \ldots\ ,\ [x_{k-1}, x_k]$.

I punti x_1 e x_k si chiamano estremi della poligonale.

I segmenti $[x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k]$ si chiamano lati della poligonale.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che E è un insieme

- convesso se per ogni $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in E;
- stellato se esiste $x_0 \in E$ tale che per ogni $x \in E$ il segmento $[x_0, x]$ sia contenuto in E;
- connesso per poligonali se per ogni $x, y \in E$ esiste una poligonale di estremi x e y contenuta in E.

Osservazioni

- Si riconosce facilmente che ogni insieme convesso è stellato e ogni insieme stellato è connesso per poligonali; le implicazioni inverse non valgono. Esempi . . .
- Si dimostra (non lo facciamo) che ogni insieme connesso per poligonali è connesso, e se l'insieme è aperto vale anche l'implicazione inversa.

  Dunque: per i sottoinsiemi **aperti** di $\mathbb{R}^n$ connessione e connessione per poligonali sono nozioni equivalenti.

Esercizio riepilogativo

Esaminiamo alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ dal punto di vista delle proprietà che abbiamo introdotto in generici spazi metrici.

Precisamente, ci proponiamo di determinare la frontiera di ciascuno degli insiemi proposti e di stabilire se sono aperti, chiusi, né aperti né chiusi; se sono limitati, compatti, convessi, stellati, connessi per poligonali, connessi.

Notazione: utilizzeremo le lettere x, y, z invece di x_1, x_2, x_3.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\Big\} \cup \Big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\Big\}$

- $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b],\ y = 0\right\}$

- $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in (a, b),\ y = 0\right\}$

- $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1\,,\ x^2 + y^2 > 1\right\}$

- $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2 \leq x + 3\,y \leq 10\right\}$

- $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\,,\ 0 \leq z \leq 4\right\}$

Funzioni continue

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Sia $\bar{x} \in X$.

Diciamo che una funzione $f : X \to Y$ è continua in $\bar{x}$ se è soddisfatta una delle seguenti proprietà, tra loro equivalenti: $\leftarrow$ verificare per esercizio

(a) per ogni intorno V di $f(\bar{x})$ in (Y, d_Y) esiste un intorno U di $\bar{x}$ in (X, d_X) tale che $f(U) \subseteq V$;

(b) per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che:
per ogni $x \in X$ con $d_X(x, \bar{x}) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$;

(c) per ogni successione (x_n) convergente a $\bar{x}$ in (X, d_X), la successione trasformata $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$ in (Y, d_Y).

Se $A \subseteq X$, diciamo che f è continua in A se è continua in ogni punto di A; diciamo che f è continua se è continua in X.

Esempio

Siano (X, d) uno spazio metrico e $\tilde{x} \in X$.

La funzione $x \in X \mapsto d(x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}$ è continua.

segue dalla seconda disuguaglianza triangolare

Proposizione (continuità e composizione funzionale)

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici.

Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$.

Sia $x_0 \in X$ tale che f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$.

Allora: la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.

Dimostrare per esercizio utilizzando la formulazione (c) della continuità

Alcune proprietà delle funzioni continue

Teorema (di Weierstrass)

Siano (X, d_X) uno spazio metrico compatto, (Y, d_Y) uno spazio metrico, $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora:

1. l'immagine $f(X)$ è un insieme compatto;
2. se $Y = \mathbb{R}$, allora f ha massimo e minimo.

Dimostrazione . . .

Teorema (di Cantor)

Siano (X, d_X) uno spazio metrico compatto, (Y, d_Y) uno spazio metrico, $f : X \to Y$ una funzione continua.

Allora: f è uniformemente continua, cioè per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tale che per ogni $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Teorema (dei valori intermedi)

Siano (X, d_X) uno spazio metrico connesso, (Y, d_Y) uno spazio metrico, $f : X \to Y$ una funzione continua.

Allora:

1. l'immagine $f(X)$ è un insieme connesso;
2. se $Y = \mathbb{R}$, allora $f(X)$ è un intervallo e la funzione f assume tutti i valori compresi tra il proprio estremo inferiore e il proprio estremo superiore.

Particolari spazi metrici: spazi normati e spazi con prodotto scalare

$\swarrow$ ormai è noto dal corso di Geometria!

Sia X uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$).

Una norma in X è una funzione $N : X \to \mathbb{R}_+$ soddisfacente le seguenti proprietà:

N1 $N(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;

N2 $N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;

N3 $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ per ogni $x, y \in X$. disuguaglianza triangolare

Di solito si utilizza la notazione $\|x\|$ invece di $N(x)$; la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si chiama spazio normato.

Esempio ...

Osservazione

Sia $\|\cdot\|$ una norma nello spazio vettoriale X.
La funzione definita in $X \times X$ ponendo

$$d(x,y) := \|x-y\| \quad \text{per ogni } x, y \in X$$

è una metrica in X, detta metrica indotta dalla norma. *Verifica ...*

Pertanto: ogni spazio normato è anche uno spazio metrico.

Uno spazio normato che risulti completo rispetto alla metrica indotta dalla norma viene chiamato spazio di Banach.

Esempio ...

Osservazione

Se d è la distanza indotta dalla norma $\|\cdot\|$, allora: $\|x\| = d(x,0)$.
Pertanto: la norma è una funzione continua. $\leftarrow$ esempio a pag. 35

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Un prodotto scalare in X è una funzione $P : X \times X \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:

- **P1** $P(x,x) \geq 0$ per ogni $x \in X$ e $P(x,x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- **P2** $P(x,y) = P(y,x)$ per ogni $x, y \in X$;
- **P3** $P(\lambda x, y) = \lambda P(x,y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$;
- **P4** $P(x+y,z) = P(x,z) + P(y,z)$ per ogni $x, y, z \in X$.

Di solito si utilizza la notazione $\langle x, y \rangle$ invece di $P(x,y)$;
la coppia $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si chiama spazio pre-hilbertiano.

Esempio ...

Osservazione

Sia $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ un prodotto scalare nello spazio vettoriale X.
La funzione definita in X ponendo

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

è una norma in X, detta norma indotta dal prodotto scalare.

Nota: nella verifica (per la quale si rimanda al corso di Geometria) si utilizza la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \text{per ogni } x, y \in X.$$

Pertanto: ogni spazio pre-hilbertiano è anche uno spazio normato (e dunque uno spazio metrico).

Uno spazio pre-hilbertiano che risulti di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare viene chiamato spazio di Hilbert.

Esempio ...

Esempio (importante!)

L'applicazione definita ponendo

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ è un prodotto scalare, detto prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Chiamiamo norma euclidea la norma indotta dal prod. scalare standard:

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

Poiché

$$\|x - y\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$\downarrow$ soddisfa D3!

la metrica indotta dalla norma euclidea coincide con la metrica euclidea. Pertanto:

$(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_{\mathbb{R}^n})$ è uno spazio di Banach e $(\mathbb{R}^n, \cdot\,)$ è uno spazio di Hilbert.

Nota

Anche le applicazioni definite in $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_{max} := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

sono norme. Verificare per esercizio ...

Le metriche corrispondenti sono, rispettivamente, la metrica del reticolo e la metrica del massimo.

Ciascuna di tali norme rende $\mathbb{R}^n$ uno spazio di Banach; tuttavia, tali norme non sono indotte da alcun prodotto scalare.

E per questo preferiamo la norma euclidea ...

Concludiamo questo capitolo riformulando in termini della norma euclidea alcune nozioni già introdotte in $\mathbb{R}^n$ mediante la distanza euclidea.

Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^*_+$:

- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < r\}$
- $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$
- $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = r\}$

Se $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_k) \text{ converge a } x \iff \lim_{k \to +\infty} \|x_k - x\|_{\mathbb{R}^n} = 0$$

Se $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} E \text{ è limitato} &\iff \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}^*_+ \ \text{ t.c. } \ \forall\, x \in E : \|x - \bar{x}\| \leq r \\ &\iff \exists\, M \in \mathbb{R}^*_+ \ \text{ t.c. } \ \forall\, x \in E : \|x\| \leq M \end{aligned}$$

Riformuliamo anche il Lemma di pagina 17:

per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$|x_j| \;\leq\; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Equivalentemente: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|x\|_{max} \;\leq\; \|x\|_{\mathbb{R}^n} \;\leq\; \|x\|_1.$$

A P P E N D I C E

(V E R I F I C H E, R I C H I A M I, . . .)

Verifica della seconda disuguaglianza triangolare

Fisso x, y, z. Per la disuguaglianza triangolare:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y);$$

portando a primo membro:

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) \ (= d(y,z));$$

scambiando y e z:

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z);$$

moltiplicando per -1:

$$d(x,y) - d(x,z) \geq -d(y,z).$$

Mettendo insieme le disuguaglianze colorate:

$$-d(y,z) \leq d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z),$$

che equivale a

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z). \qquad \square$$

Richiamo sulle successioni estratte

Sia X un insieme qualsiasi. Sia (x_n) una successione di elementi di X.

Sia (k_n) una successione strettamente crescente di elementi di $\mathbb{N}$.

Nota: la stretta monotonia implica $k_n \geq n$ per ogni n.

La successione (x_{k_n}) si chiama successione estratta dalla successione (x_n), o anche sottosuccessione della successione (x_n).

Significato "pratico" ...

Ricordiamo che

- se una successione converge, ogni sua sottosuccessione converge allo stesso limite a cui converge la successione di partenza;
- una successione può avere sottosuccessioni convergenti e tuttavia non convergere. Esempi?