a.a. 2024/2025

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica II

Equazioni differenziali lineari – solo un'anteprima

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online; non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Terminologia

Una equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale; l'equazione viene espressa attraverso una relazione tra la variabile indipendente, la funzione incognita e le sue derivate fino a un certo ordine.

Il più alto ordine di derivazione che compare nella relazione si chiama ordine dell'equazione differenziale.

In questa "anteprima" consideriamo esclusivamente equazioni differenziali lineari di ordine 1 e di ordine 2.

Equazioni differenziali lineari di ordine 1

Siano a, b funzioni reali definite in un medesimo intervallo $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.
Chiamiamo equazione differenziale lineare di ordine 1 con coefficiente a e termine noto b l'espressione

$$y' + a(t)\, y = b(t). \tag{1}$$

Nota: nella scrittura (1) esplicitiamo la dipendenza dalla variabile indipendente del coefficiente e del termine noto, mentre sottintendiamo la dipendenza della funzione incognita e delle sue derivate.

Esempi

- $y' = e^{-t} \qquad y' = e^{-t^2}$
- $p' + \alpha\, p = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $p' + \alpha\, p = \sin(t) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $p' + t\, p = \sin(t)$

L'equazione (1) è detta omogenea se il termine noto b è la funzione identicamente nulla, altrimenti è detta non omogenea (oppure completa).

Se (1) è non omogenea, l'equazione differenziale lineare omogenea avente lo stesso coefficiente è detta equazione omogenea associata a (1).

Se la funzione a è costante, l'equazione (1) è detta a coefficienti costanti. (Nota: sul termine noto b non si suppone nulla.)

Esempi

- $y' + t\,y = e^t$
- $y' + t\,y = 0$
- $y' + 2\,y = e^t$

Siano $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, con I intervallo.
Si chiama soluzione dell'equazione differenziale

$$y' + a(t)\, y = b(t) \tag{1}$$

una funzione $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che

$$\underset{\uparrow}{\varphi'(t)} + a(t)\, \underset{\uparrow}{\varphi(t)} = b(t) \qquad \text{per ogni } t \in \mathrm{I}.$$

qui la funzione e la sua derivata sono valutate in t

L'insieme di tutte le soluzioni di (1) viene detto integrale generale;
una singola soluzione viene detta integrale particolare.

Siano $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Siano $t_0 \in \mathrm{I}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

Associando all'equazione differenziale

$$(1) \qquad y' + a(t)\, y = b(t)$$

la condizione iniziale

$$y(t_0) = x_0$$

si ottiene il problema di Cauchy di valori iniziali t_0, x_0.

Esplicitare la nozione di soluzione ...

Come si determina l'integrale generale di (1)?

Come si risolvono i problemi di Cauchy associati?

Teorema

Siano $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $a, b \in C(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Sia A una qualsiasi primitiva della funzione a.

Allora: l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + a(t)\, y = b(t) \tag{1}$$

è dato da

$$e^{-A(t)} \int e^{A(t)}\, b(t)\, dt \qquad t \in \mathrm{I}.$$

Esplicitando: denotata con γ una qualsiasi primitiva della funzione

$$t \in \mathrm{I} \mapsto e^{A(t)}\, b(t),$$

la generica soluzione di (1) è

$$\varphi_c(t) = e^{-A(t)}(\gamma(t) + c) \qquad t \in \mathrm{I}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Verifica . . .

Note

- Talvolta le equazioni differenziali lineari di ordine 1 vengono scritte nella forma
$$y' = a(t)\, y + b(t);$$
in tal caso, l'integrale generale diventa
$$\varphi(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)}\, b(t)\, dt \qquad t \in \mathrm{I}.$$

- Nel teorema precedente, l'esistenza delle primitive A e γ è garantita dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, ma non è detto che tali primitive si possano esprimere in termini di funzioni elementari; in questi casi, l'integrale generale di (1) non potrà essere determinato esplicitamente.

Esempi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali e risolvere i problemi di Cauchy con le condizioni iniziali indicate:

- $y' + 3\,y = 0$ $\qquad y(0) = 2$ $\qquad y' + a\,y = 0$
- $y' + t\,y = 0$ $\qquad y(1) = 2$
- $y' - \sin(t)\,y = 0$ $\qquad y(\pi/2) = -1$
- $y' - e^{t^2}\,y = 0$ $\qquad y(0) = -2$
- $y' + \tan(t)\,y = 0$ $\qquad y(\pi) = 3$
- $y' + \dfrac{2}{t}\,y = 4\,t$ $\qquad y(1) = 2$
- $y' - 2\,t\,y = t$ $\qquad y(0) = 2$
- $y' + 2\,t\,y = 1$ $\qquad y(0) = 2$
- $y' + \dfrac{4}{t}\,y = \dfrac{1}{t^3\,e^t}$ $\qquad y(-1) = 0$

Osservazione

Con le notazioni del teorema di pagina 6, poniamo

$$\varphi_0(t) := e^{-A(t)} \qquad t \in \mathrm{I}.$$

La generica soluzione dell'equazione differenziale

$$(1) \qquad y' + a(t)\, y = b(t)$$

si scrive come

$$\varphi_c(t) = c\, \varphi_0(t) + \gamma(t)\, \varphi_0(t) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

con

- φ_0 soluzione particolare dell'equazione omogenea associata a (1),
- $c\, \varphi_0$ soluzione generica dell'equazione omogenea associata a (1),
- $\gamma\, \varphi_0$ soluzione particolare di (1).

Ritroveremo questa "struttura" per le equazioni differenziali lineari di ordine 2

Equazioni differenziali lineari di ordine 2

Siano a_0, a_1, b funzioni reali definite in un medesimo intervallo $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Chiamiamo equazione differenziale lineare di ordine 2 con coefficienti a_0 e a_1 e termine noto b l'espressione

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t). \tag{2}$$

Si chiama soluzione di (2) una funzione $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e tale che

$$\varphi''(t) + a_1(t)\, \varphi'(t) + a_0(t)\, \varphi(t) = b(t) \qquad \text{per ogni } t \in \mathrm{I}.$$

Nota

I termini integrale generale, integrale particolare, omogenea, non omogenea (oppure completa), omogenea associata si utilizzano esattamente come nel caso delle equazioni di ordine 1; a coefficienti costanti significa che entrambe le funzioni a_0 e a_1 sono costanti. Esempi ...

Siano $a_0, a_1, b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Siano $t_0 \in \mathrm{I}$ e $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$.
Associando all'equazione differenziale

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \tag{2}$$

le condizioni iniziali

$$y(t_0) = x_0 \qquad y'(t_0) = x_1$$

si ottiene il problema di Cauchy di valori iniziali t_0, x_0, x_1. Soluzione?

Teorema ← conseguenza di risultati generali del corso di An. Mat. III
Con le notazioni introdotte in questa pagina, supponiamo che a_0, a_1, b siano funzioni continue.
Allora: esiste una e una sola soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \\ y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Come si determina l'unica soluzione prevista dal teorema?

Come si determina l'integrale generale di (2)?

Abbiamo bisogno di alcuni preliminari ...

Proposizione (principio di sovrapposizione)

Sia I un intervallo; siano $a_0, a_1, b_1, b_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

Siano φ_1 e φ_2 soluzioni delle equazioni differenziali lineari con coefficienti a_0, a_1 e termini noti b_1 e b_2, rispettivamente.

Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Allora: $\swarrow$ combinazione lineare di φ_1 e φ_2

la funzione $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$ è soluzione dell'equazione differenziale con coefficienti a_0, a_1 e termine noto $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. $\leftarrow$ combinazione lineare di b_1 e b_2 con gli stessi coefficienti

Verifica ...

Utilità pratica e significato fisico ...

Corollario 1

Sia I un intervallo; siano $a_0, a_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

La combinazione lineare di due soluzioni dell'equazione omogenea

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0$$

è soluzione della stessa equazione. La verifica è immediata!

Corollario 2 (struttura dell'integrale generale)

Sia I un intervallo; siano $a_0, a_1, b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

Sia $\overline{\varphi}$ un integrale particolare della equazione non omogenea

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t).$$

Allora: l'integrale generale della stessa equazione è costituito da tutte e sole le funzioni del tipo $\varphi = \varphi_0 + \overline{\varphi}$, con φ_0 soluzione dell'equazione omogenea associata.

Verifica ... Confrontare con pagina 9 ...

In base al Corollario 2, per determinare l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale lineare di ordine 2 occorre e basta determinare:

1. tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,
2. una soluzione dell'equazione data. $\leftarrow$ rilevante solo se l'equazione data non è omogenea

Come si fa?

Nota (dolente!)
A differenza che nel caso delle equazioni differenziali lineari di ordine 1, per quelle di ordine 2 non esiste una formula risolutiva generale;
si ricorre a sostituzioni, metodi di riduzione dell'ordine, integrazione per serie, metodi numerici, ...

Per fortuna c'è una significativa eccezione ...

Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{3}$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Dove sono definite le soluzioni?

Prendendo spunto dall'equazione del primo ordine $y' + a\, y = 0$, che è risolta dalla funzione esponenziale $t \mapsto e^{-at}$, ci chiediamo se anche (3) abbia soluzioni di tipo esponenziale.

Lemma

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. La funzione esponenziale $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}$ risolve l'equazione differenziale omogenea (3) se e solo se

$$\lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0 = 0.$$

Verifica . . .

Definiamo il polinomio caratteristico dell'equazione

$$(3) \qquad y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

ponendo

$$P(\lambda) := \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0.$$

Nota: P si ottiene formalmente da (3) sostituendo potenze di λ a derivate di y.

In base al Lemma, a ogni radice reale del polinomio caratteristico corrisponde una soluzione di tipo esponenziale di (3).

Nota: è vero anche per
$y' + a\, y = 0$

Esempi

- $y'' - y = 0$
- $y'' + y' = 0$
- $y'' - 3\, y' - 10\, y = 0$
- $y'' + 2\, y' + y = 0$

Il polinomio caratteristico potrebbe avere radici complesse!!

Parentesi: soluzioni complesse di equazioni differenziali

Sia I un intervallo; sia $z : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ una funzione complessa.

Definiamo le funzioni $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ e $v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$u(t) = \mathrm{Re}(z(t)), \quad v(t) = \mathrm{Im}(z(t)) \quad \text{per ogni } t \in \mathrm{I};$$

possiamo quindi scrivere

$$z(t) = u(t) + i\,v(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathrm{I}.$$

Chiamiamo u e v, rispettivamente, funzione parte reale di z e funzione parte immaginaria di z.

Se u e v sono derivabili in I, diciamo che z è derivabile in I e definiamo la derivata di z ponendo

$$z'(t) := u'(t) + i\,v'(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathrm{I}.$$

Le derivate successive si definiscono in maniera analoga.

Esempio

Sia $\lambda = \alpha + i\,\beta$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$. La funzione complessa

$$z := t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t} := e^{\alpha\, t}(\cos(\beta t) + i\,\sin(\beta t))$$

è derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata $z'(t) = \lambda\, e^{\lambda\, t}$.

Diciamo che una funzione $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è soluzione complessa dell'equazione differenziale con coefficienti $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \tag{3}$$

se z è derivabile due volte e per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$z''(t) + a_1\, z'(t) + a_0\, z(t) = 0$$

$\uparrow$ zero di $\mathbb{C}$

Esempio

La funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\,t}$ è soluzione complessa di $y'' + y = 0$.

Osservazioni

- Se $z = u + i\,v$, allora z è soluzione complessa di (3) se e solo se u e v sono soluzioni reali (cioè nel modo precedentemente definito) di (3).
  Riesaminare l'esempio precedente ...

- Se la funzione complessa $z = u + i\,v$ è soluzione di (3), allora anche la funzione complessa coniugata $\bar{z} = u - i\,v$ è soluzione di (3).

Fine della parentesi

Proposizione

Per ogni numero reale (complesso) λ, la funzione

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}$$

è soluzione reale (complessa) dell'equazione

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico.

Dimostrazione . . . già fatta!

Esempi

- $y'' + 4\, y = 0$
- $y'' + 2\, y' + 5\, y = 0$
- $y'' - 6\, y' + 25\, y = 0$

Teorema (determinazione dell'integrale generale di equazioni omogenee)
Sia P il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale lineare omogenea

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \qquad\qquad (a_0, a_1 \in \mathbb{R})$$

1. Se P ha due radici reali distinte λ_1 e λ_2, allora l'integrale generale è costituito da tutte le combinazioni lineari a coefficienti reali delle funzioni $\quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_1 t}$ e $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda_2 t}$.

2. Se P ha una radice reale λ di molteplicità 2, allora l'integrale generale è costituito da tutte le combinazioni lineari a coefficienti reali delle funzioni $\quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}$ e $t \in \mathbb{R} \mapsto t\, e^{\lambda t}$.

3. Se P ha radici complesse coniugate $\alpha \pm i\,\beta$ $(\beta \neq 0)$, allora l'integrale generale è costituito da tutte le combinazioni lineari a coefficienti reali delle funzioni $\quad t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta\, t)$ e $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta\, t)$.

Dimostrazione ...

Esempi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee:

- $y'' - y = 0$
- $y'' + y' = 0$
- $y'' + y = 0$
- $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$
- $y'' - 3\,y' - 10\,y = 0$
- $y'' + 2\,y' + y = 0$
- $y'' + 4\,y = 0$
- $y'' - 6\,y' + 25\,y = 0$

Esempio

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare omogenea dipendente da parametri:

$$x'' + 2\,\gamma\,x' + \omega_0^2\,x = 0 \qquad \left(\gamma = \frac{\alpha}{2\,m}\,,\ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \ m, k > 0,\ \alpha \geq 0\right)$$

Equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti

Siano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $b \not\equiv 0$.
Consideriamo l'equazione differenziale non omogenea a coefficienti costanti

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \tag{4}$$

Ricordiamo che, conoscendo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, per determinare l'integrale generale di (4) è sufficiente determinarne un integrale particolare.

Come si fa?
Rispondiamo a tale domanda nel caso di termini noti di tipo particolare.

Per termini noti generali: An. Mat. III ...

Teorema (metodo di somiglianza)

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \tag{4}$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

1. Supponiamo $b(t) = e^{\lambda t}\, p(t)$ con
   - λ numero reale,
   - p funzione polinomiale di grado k.

   $\psi(t)$ "somiglia" a $b(t)$

   $\downarrow$

   Allora: esiste una soluzione di (4) della forma $\psi(t) = e^{\lambda t}\, \widetilde{p}(t)\, t^m$ con
   - $\widetilde{p}$ funzione polinomiale di grado k,
   - m molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata a (4).

2. Supponiamo $b(t) = e^{\alpha t}\Big(p(t)\cos(\beta t) + q(t)\sin(\beta t)\Big)$ con
   - α, β numeri reali,
   - p, q funzioni polinomiali di grado k e h, rispettivamente.

   Allora: esiste una soluzione di (4) della forma

$$\psi(t) = e^{\alpha t}\Big(\widetilde{p}(t)\cos(\beta t) + \widetilde{q}(t)\sin(\beta t)\Big)\, t^m$$

   con
   - $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q}$ funzioni polinomiali di grado minore o uguale a $\max\{k, h\}$,
   - m molteplicità di $\lambda := \alpha + i\,\beta$ come radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata a (4).

Nota: se λ non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata, intendiamo $m = 0$ e $t^m = 1$.

Nota

Il teorema afferma l'esistenza di funzioni polinomiali tramite le quali si costruiscono soluzioni di (4). Per determinare tali funzioni polinomiali occorre determinarne i coefficienti; per questa ragione il metodo viene anche chiamato dei coefficienti indeterminati.

Esempi

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari:

- $y'' - 2\,y' - 3\,y = 3\,e^{2\,t}$
- $y'' - y' - 2\,y = -2\,t + 4\,t^2$
- $y\,'' + 9\,y = t^2\,e^{3\,t} + 6$
- $y'' + 2\,y' + 5\,y = 3\,\sin(2\,t)$
- $y'' + 2\,y' + y = 2\,e^{-t}$

Esempi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- $y'' - 4\,y' + 4\,y = (t^2 + t)\,e^{-t} \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1$
- $y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\cos(t) + e^t \qquad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1$

Esempio

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare non omogenea dipendente da parametri:

$$x'' + 2\,\gamma\,x' + \omega_0^2\,x = \delta\,\sin(\omega\,t) \qquad \omega_0, \omega, \delta \in (0, +\infty), \quad \gamma \in [0, +\infty)$$