Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prima prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

23 aprile 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y' + 5\,y = t\,e^{2\,t} + 4\,\cos(t)\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

2. Si consideri la funzione definita ponendo $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{x^2+y^2-1}$.

   (a) Si determini il dominio di f e se ne descrivano le proprietà (aperto, chiuso, convesso, connesso, limitato, compatto).

   (b) Si studino i limiti significativi di f .

3. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x,y) = |x-y|\,(x^2+y^2-2)\,.$$

   (a) Si studi la differenziabilità di f .

   (b) Si calcoli la derivata di f nel punto $(1,-1)$ nella direzione $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

   (c) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

10 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determinino gli estremi locali della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x,y) = e^{-|x|}\,(2\,x\,y + y^2).$$

2. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x\,y,\; x+z,\; x^2\,z)$$

   uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e dai piani di equazione $z=1$ e $z=4$.
   Si verifichi mediante il teorema della divergenza la correttezza del risultato ottenuto.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t(t-1)(2-t),\; 1-|t-1|)\;,\quad t \in [0,2]$.

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

   (b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 10 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - y' - 2\,y = (9\,t^2 + t)\,e^{-t}\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

2. Data la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x, y) = e^{-|x|}\,(2\,x\,y + y^2),$$

   (a) se ne studi la differenziabilità;

   (b) se ne determinino gli estremi locali.

3. Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t(t-1)(2-t),\ 1 - |t-1|)$, $t \in [0, 2]$.

   (a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

   (b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

4. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x\,y,\ x + z,\ x^2\,z)$$

   uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Recupero della seconda prova di esonero per l'esame di **Analisi Matematica II**

24 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$.

   (a) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f.

   (b) Si determinino gli estremi globali di f nel triangolo di vertici $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$.

2. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x\,y,\ x+z,\ x^2\,z)$$

   entrante nella porzione della superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ delimitata dai piani di equazione $z=1$ e $z=4$.

3. Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

   sulla curva grafico associata alla funzione definita ponendo $g(x) = 1 - x^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.
   Si verifichi la correttezza del risultato ottenuto, ricalcolando l'integrale mediante un procedimento alternativo.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 24 giugno 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y = t\,e^{2\,t}\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

2. Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$.

   (a) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f.

   (b) Si determinino gli estremi globali di f nel triangolo di vertici $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$.

3. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x\,y,\ x+z,\ x^2\,z)$$

   entrante nella porzione della superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ delimitata dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

4. Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

   sulla curva grafico associata alla funzione definita ponendo $g(x) = 1 - x^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 8 luglio 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 2\cos t + t\sin t\,.$$

2. Si consideri la funzione definita ponendo

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \ln(x^2+y^2) & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Si studi la differenziabilità di f.

   (b) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f.

3. Si calcoli l'integrale triplo della funzione definita ponendo $f(x,y,z) = x\,y$ nella regione dello spazio, contenuta nel primo ottante, delimitata dal piano di equazione $x+y+z=1$ e dal paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$.

   Nota: a seconda della formula di riduzione utilizzata per il calcolo dell'integrale, può essere utile tenere presente l'uguaglianza

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + \sin t}{(\cos t + \sin t)^4}\,dt = \frac{1}{6}\,.$$

4. Sia Σ la porzione della sfera di equazione di centro l'origine e raggio 3 posta al di sopra del piano di equazione $z=1$. Si calcoli il flusso che attraversa Σ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2\,y,\ \ y\,z,\ \ 3\,y^2)$.

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 9 settembre 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 6\,y = 2\,e^{3\,t} + 1\,.$$

2. Si determinino gli estremi locali della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = y\,(x^2 - 1) - |x|\,y^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si calcoli il volume del solido delimitato dai paraboloidi di equazione $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

4. Sia Σ la porzione del piano di equazione $x + y + 2\,z = 2$ contenuta nel primo ottante. Si calcoli il flusso che attraversa Σ dal basso verso l'alto del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y^4\,z - y^2,\ \ y - x^3,\ \ z^2).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 5 novembre 2025

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2\,y' + 5\,y = e^t \sin(2\,t)\,.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\,,\ -\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right)\right)$$

sul segmento congiungente i punti di coordinate $(1,3)$ e $(4,1)$.

4. Sia T la porzione del cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$ delimitata dal piano di equazione $z = 0$ e dal paraboloide di equazione $z = 3 - x^2 - y^2$.
Si calcoli il flusso uscente attraverso la frontiera di T del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (2\,x\,y,\ x^2,\ z^2).$$

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Prova scritta di **Analisi Matematica II** – 8 gennaio 2026

Giustificare affermazioni e passaggi per ottenere punteggio pieno!

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' + 2\,y' - 3\,y = 2\,e^t + t\,e^{2\,t}.$$

2. Si determinino gli estremi locali e globali della funzione definita ponendo
$$f(x, y) = x\,(e^x - y^2)^2$$
per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Si stabilisca se il campo vettoriale
$$F(x, y, z) = (y\,e^x - e^y\,,\ e^x - x\,e^y\,,\ z)$$
è conservativo. In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale e lo si utilizzi per calcolare l'integrale di F sulla curva di parametrizzazione $r(t) = (\cos^2(t),\ \cos(t)\,\sin(t),\ t)\,,\ t \in [0, 2\,\pi]$.

4. Sia T l'insieme, contenuto nel semispazio $z \geq 0$, racchiuso tra la superficie sferica di centro l'origine e raggio 3 e il cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Si calcoli l'integrale in T della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.
   (b) Si parametrizzi la frontiera di T in modo da orientarla positivamente.