Questo documento contiene lo svolgimento dei quesiti proposti nelle seguenti prove scritte per l'esame di Analisi Matematica II:

- prima prova di esonero (23 aprile 2025)
- seconda prova di esonero (10 giugno 2025)
- prova scritta del 24 giugno 2025
- prova scritta dell'8 luglio 2025

Naturalmente lo svolgimento proposto non è l'unico possibile. Talvolta vengono forniti alcuni dettagli non indispensabili, allo scopo di costituire una guida nella preparazione all'esame.

Sarò grata a coloro che segnaleranno eventuali refusi e imprecisioni (scrivendo a monica.lazzo@uniba.it).

Svolgimento della prima prova di esonero di Analisi Matematica II – 23 aprile 2025

Quesito 1

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y' + 5\,y = t\,e^{2\,t} + 4\,\cos(t)\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

Svolgimento

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogena associata è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\,\lambda + 5$, che ha radici complesse coniugate $\lambda = 2 + i$ e $\lambda = 2 - i$. La generica soluzione dell'equazione omogenea associata è quindi

$$c_1\,e^{2\,t}\,\cos(t) + c_2\,e^{2\,t}\,\sin(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata si ottiene come somma di una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $t\,e^{2\,t}$ e una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $4\,\cos(t)$. Per entrambe le equazioni si può utilizzare il metodo di somiglianza.

Osservando che $P(2) \neq 0$, determino una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $t\,e^{2\,t}$ della forma $\varphi(t) = (a\,t + b)\,e^{2\,t}$. Derivando ottengo

$$\varphi'(t) = a\,e^{2\,t} + 2\,(a\,t + b)e^{2\,t}\,, \quad \varphi''(t) = 2\,a\,e^{2\,t} + 2\,a\,e^{2\,t} + 4\,(a\,t + b)e^{2\,t}\,;$$

sostituendo nell'equazione:

$$4\,a\,e^{2\,t} + 4\,(a\,t + b)e^{2\,t} - 4\,a\,e^{2\,t} - 8\,(a\,t + b)e^{2\,t} + 5\,(a\,t + b)\,e^{2\,t} = t\,e^{2\,t}\,,$$

cioè $(a\,t + b)e^{2\,t} = t\,e^{2\,t}$, che equivale a $a\,t + b = t$. Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$ e $b = 0$, dunque: $\varphi(t) = t\,e^{2\,t}$.

Osservando che $P(i) \neq 0$, determino una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $4\,\cos(t)$ della forma $\psi(t) = a\,\cos(t) + b\,\sin(t)$. Derivando ottengo

$$\psi'(t) = -a\,\sin(t) + b\,\cos(t)\,, \quad \psi''(t) = -a\,\cos(t) - b\,\sin(t)\,;$$

sostituendo nell'equazione:

$$-a\,\cos(t) - b\,\sin(t) - 4\,(-a\,\sin(t) + b\,\cos(t)) + 5\,(a\,\cos(t) + b\,\sin(t)) = 4\,\cos(t)\,.$$

Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$-a - 4\,b + 5\,a = 4\,, \qquad -b + 4\,a + 5\,b = 0$$

da cui ricavo $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$. Dunque: $\psi(t) = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)$.

La generica soluzione dell'equazione assegnata è

$$y(t) = c_1\, e^{2\,t}\cos(t) + c_2\, e^{2\,t}\sin(t) + t\, e^{2\,t} + \tfrac{1}{2}\cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato calcolo

$$y'(t) = 2\,c_1\, e^{2\,t}\cos(t) - c_1\, e^{2\,t}\sin(t) + 2\,c_2\, e^{2\,t}\sin(t) + c_2\, e^{2\,t}\cos(t) +$$

$$+ e^{2\,t} + 2\,t\, e^{2\,t} - \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{1}{2}\cos(t)$$

e impongo le condizioni iniziali:

$$0 = y(0) = c_1 + \tfrac{1}{2}\,, \qquad 1 = y'(0) = 2\,c_1 + c_2 + 1 - \tfrac{1}{2}\,.$$

Ottengo dunque $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{3}{2}$.

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}\, e^{2\,t}\cos(t) + \tfrac{3}{2}\, e^{2\,t}\sin(t) + t\, e^{2\,t} + \tfrac{1}{2}\cos(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}.$$

Quesito 2

Si consideri la funzione definita ponendo $f(x, y) = \dfrac{x + y - 1}{x^2 + y^2 - 1}$.

(a) Si determini il dominio di f e se ne descrivano le proprietà (aperto, chiuso, convesso, connesso, limitato, compatto).

(b) Si studino i limiti significativi di f.

Svolgimento

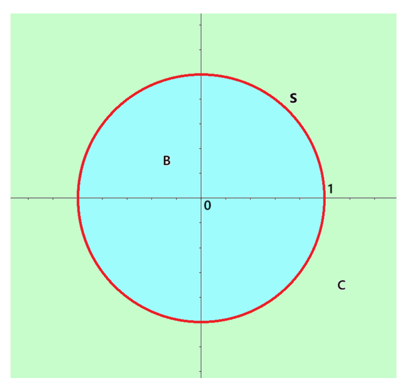
(a) La funzione assegnata è definita nell'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$$

che può essere espresso come unione degli insiemi disgiunti

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 < 0\}$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 > 0\}.$$

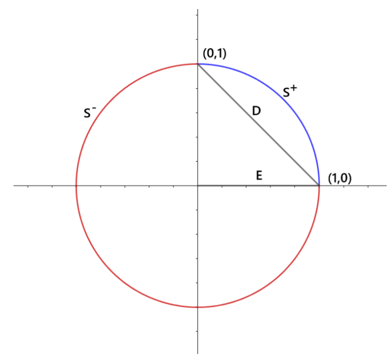


Noto che B è la palla aperta di centro $(0,0)$ e raggio 1, quindi è un insieme aperto e limitato. L'insieme C è invece il complementare della palla chiusa di centro $(0,0)$ e raggio 1, quindi è un insieme aperto (perché complementare di un insieme chiuso) e illimitato (perché complementare in $\mathbb{R}^2$ di un insieme limitato).

Contenendo un insieme illimitato, A è illimitato, e pertanto non compatto.

Essendo unione di due insiemi aperti disgiunti, A non è connesso (e pertanto non è connesso per poligonali, né stellato, né convesso).

Osservo che la frontiera di A è la circonferenza unitaria $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, che non è contenuta in A; pertanto, A non è chiuso.



(b) Essendo una funzione razionale, f è continua nel proprio dominio. Sono pertanto da ritenersi "significativi" i limiti nei punti di accumulazione di A che non appartengono ad A (ossia tutti i punti di S); inoltre, siccome A è illimitato, va considerato il limite per $\|(x,y)\| \to +\infty$.

Per ragioni che saranno subito chiare, denoto con S_+ la porzione di S contenuta nell'interno del primo quadrante e pongo $S_- := S \setminus (S_+ \cup \{(1,0),(0,1)\})$.

Fisso $(a,b) \in S_+$ (perciò $a+b-1 > 0$). Risulta

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{|B}(x,y) = \frac{a+b-1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{|C}(x,y) = \frac{a+b-1}{0^+} = +\infty$$

dunque f non ha limite per $(x,y) \to (a,b)$.

Fisso $(a,b) \in S_-$ (perciò $a+b-1 < 0$). Risulta

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{|B}(x,y) = \frac{a+b-1}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f_{|C}(x,y) = \frac{a+b-1}{0^+} = -\infty$$

dunque f non ha limite per $(x,y) \to (a,b)$.

Restano da studiare i limiti in $(1,0)$ e $(0,1)$, che presentano una forma di indecisione "zero su zero".

Pongo $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1),\ x+y-1 = 0\}$ (segmento congiungente $(0,1)$ e $(1,0)$) e $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1),\ y = 0\}$ (segmento congiungente l'origine e $(1,0)$).

Dato che la restrizione di f a D coincide con la funzione identicamente nulla, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f_{|D}(x,y) = 0;$$

tuttavia

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f_{|E}(x,y) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2},$$

quindi f non ha limite per $(x,y)\to(1,0)$. Per ragioni di simmetria (oppure restringendo f al segmento congiungente $(0,0)$ e $(0,1)$) deduco che f non ha limite nemmeno per $(x,y)\to(0,1)$.

Osservando che la restrizione di f alla retta passante per $(0,1)$ e $(1,0)$ è identicamente nulla, congetturo che f abbia limite 0 per $\|(x,y)\|\to+\infty$.

Osservo che per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ si ha $(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2\,|x|\,|y| \le x^2+y^2+x^2+y^2$, quindi $|x|+|y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Pertanto, per ogni $(x,y)\in A$ si ha

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|x+y-1|}{|x^2+y^2-1|} \le \frac{|x|+|y|+1}{|x^2+y^2-1|} \le \frac{\sqrt{2\,(x^2+y^2)}+1}{|x^2+y^2-1|}$$

e siccome

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,(x^2+y^2)}+1}{|x^2+y^2-1|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{2\,t}+1}{|t-1|} = 0$$

dal teorema di convergenza obbligata deduco

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

Quesito 3

Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

$$f(x,y) = |x-y|\,(x^2+y^2-2).$$

(a) Si studi la differenziabilità di f.

(b) Si calcoli la derivata di f nel punto $(1,-1)$ nella direzione $v=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

(c) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.

Svolgimento

(a) La funzione assegnata è prodotto della funzione $(x,y)\mapsto x^2+y^2-2$, polinomiale e quindi derivabile parzialmente, e della funzione $(x,y)\mapsto|x-y|$, composta della funzione polinomiale $(x,y)\mapsto x-y$ e della funzione $t\mapsto|t|$, derivabile tranne che in $t=0$.

Definisco l'insieme $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \neq 0\}$ (il piano privato della bisettrice di primo e terzo quadrante); osservo che A è aperto e che per ogni $(x,y) \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sign}(x-y)\,(x^2+y^2-2) + |x-y|\,2\,x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sign}(x-y)\,(x^2+y^2-2) + |x-y|\,2\,y$$

Tali derivate sono evidentemente continue in A; dal corollario del teorema del differenziale totale segue allora che f è differenziabile in A.

Restano da esaminare, mediante la definizione, i punti della bisettrice di primo e terzo quadrante.

Fisso $a \in \mathbb{R}$ e considero (a,a).

Considero il rapporto incrementale di f rispetto alla prima variabile. Per ogni $t \neq 0$ si ha

$$\frac{f(a+t,a) - f(a,a)}{t} = \frac{|a+t-a|\,((a+t)^2 + a^2 - 2) - 0}{t} = \frac{|t|}{t}\,(2\,a\,t + t^2 + 2\,a^2 - 2),$$

quindi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+t,a) - f(a,a)}{t} = 2(a^2-1), \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+t,a) - f(a,a)}{t} = -2(a^2-1).$$

Per $a \neq \pm 1$ i limiti unilaterali sono diversi, quindi non esiste il limite per $t \to 0$; in (a,a) la funzione non è derivabile parzialmente rispetto a x, dunque non è differenziabile.

Per $a = \pm 1$ i limiti unilaterali sono entrambi uguali a 0, perciò in $(1,1)$ e $(-1,-1)$ la funzione è derivabile parzialmente rispetto a x con $\frac{\partial f}{\partial x}(\pm 1, \pm 1) = 0$.

Verifico se in tali punti f è anche derivabile parzialmente rispetto a y.

Scrivo il rapporto incrementale di f rispetto alla seconda variabile. Per ogni $t \neq 0$ si ha

$$\frac{f(\pm 1, \pm 1 + t) - f(\pm 1, \pm 1)}{t} = \frac{|t|\,((\pm 1)^2 + (\pm 1 + t)^2 - 2) - 0}{t} = \frac{|t|\,(\pm 2\,t + t^2)}{t} = |t|\,(\pm 2 + t);$$

il limite per $t \to 0$ esiste ed è uguale a 0, pertanto f è derivabile parzialmente rispetto a y con $\frac{\partial f}{\partial y}(\pm 1, \pm 1) = 0$.

Ricapitolando: in $(1,1)$ e $(-1,-1)$ la funzione f è derivabile parzialmente e ha gradiente uguale al vettore nullo.

Per stabilire se f è differenziabile, valuto il rapporto incrementale di f in $(1,1)$ (per simmetria, in $(-1,-1)$ si otterrà lo stesso risultato). Per $(h,k) \neq (0,0)$ si ha

$$R(h,k) := \frac{f(1+h, 1+k) - f(1,1) - \nabla f(1,1) \cdot (h,k)}{\|(h,k)\|}$$

$$= \frac{|1+h-(1+k)|\,((1+h)^2 + (1+k)^2 - 2) - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h-k|\,(2\,h + h^2 + 2\,k + k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

quindi

$$0 \leq |R(h,k)| \leq \frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\,|2\,h + h^2 + 2\,k + k^2| \leq 2\,|2\,h + h^2 + 2\,k + k^2|\,;$$

dal teorema di convergenza obbligata deduco facilmente che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0\,,$$

quindi f è differenziabile in $(1,1)$.

(b) Dato che f è differenziabile nel punto $(1,-1)$, posso calcolare la derivata direzionale richiesta utilizzando la formula del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot v = (4,-4) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{12}{\sqrt{5}}\,.$$

(c) Ha senso parlare di piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$, perché f è differenziabile in tale punto. Risulta

$$f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot ((x,y) - (1,0)) = -1 + (1,1) \cdot (x-1, y) = -1 + x - 1 + y,$$

quindi l'equazione del piano tangente è

$$z = x + y - 2\,.$$

Svolgimento della seconda prova di esonero di Analisi Matematica II – 10 giugno 2025

Quesito 1

Si determinino gli estremi locali della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo

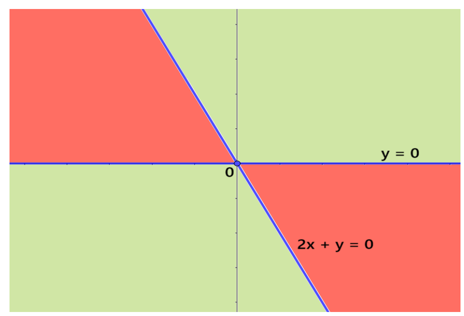
$$f(x,y) = e^{-|x|}\,(2\,x\,y + y^2).$$

Svolgimento

La funzione assegnata è continua in $\mathbb{R}^2$; la presenza del termine $|x|$ non garantisce che sia differenziabile nei punti dell'asse delle ordinate, cioè nei punti del tipo $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R}$. Non verifico se in tali punti la funzione è effettivamente differenziabile (la traccia non lo richiede; si veda però la nota al termine dello svolgimento di questo quesito), pertanto li considero tutti candidati punti di estremo locale.

Dato che la restrizione di f all'asse delle ordinate è $f(0,y) = y^2$, crescente per $y > 0$ e decrescente per $y < 0$, l'unico possibile punto di estremo dell'asse delle ordinate è $(0,0)$, che potrebbe essere punto di minimo.

Noto che $f(0,0) = 0$; dal segno di f, rappresentato nella figura qui a lato (in blu: $f = 0$; in verde: $f > 0$; in rosso: $f < 0$), deduco che $(0,0)$ non è punto di estremo locale. (Nota: non lo chiamo "punto di sella" perché non so se in tale punto f è differenziabile.)



La funzione assegnata è di classe C^∞ nell'insieme aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$; determino i punti stazionari in tale insieme. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ si ha

$$f_x(x,y) = e^{-|x|}\,(-\operatorname{sign}(x))\,(2\,x\,y + y^2) + e^{-|x|}\,(2\,y) \qquad\qquad f_y(x,y) = e^{-|x|}\,(2\,x + 2\,y).$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} -\operatorname{sign}(x)\,(2\,x\,y + y^2) + 2\,y = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricavo $y = -x$; sostituendo nella prima ottengo $-\operatorname{sign}(x)\,(-2\,x^2 + x^2) - 2\,x = 0$, ossia $\operatorname{sign}(x)\,x^2 - 2\,x = 0$. Dato che $x \neq 0$, questa equazione equivale a $\operatorname{sign}(x)\,x - 2 = 0$, cioè

$|x| - 2 = 0$. che ha soluzioni $x = 2$ e $x = -2$. Dunque, i punti stazionari di f sono $(2, -2)$ e $(-2, 2)$; per classificarli determino il segno degli autovalori della matrice hessiana.

Per calcolare le derivate seconde, osservo che supponendo di far variare (x, y) in un intorno di $(2, -2)$ interamente contenuto nel semipiano aperto di equazione $x > 0$, oppure in un intorno di $(-2, 2)$ interamente contenuto nel semipiano aperto di equazione $x < 0$, posso ritenere il termine $\operatorname{sign}(x)$ costante (di valore 1 e -1, rispettivamente). Pertanto:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= e^{-|x|}\,(-\operatorname{sign}(x))^2\,(2\,x\,y + y^2) + e^{-|x|}\,(-\operatorname{sign}(x))\,(2y) + e^{-|x|}\,(-\operatorname{sign}(x))\,(2\,y)\\
&= e^{-|x|}\,(2\,x\,y + y^2) - e^{-|x|}\operatorname{sign}(x)\,(4\,y) = e^{-|x|}\,(2\,x\,y + y^2 - \operatorname{sign}(x)\,(4\,y))\\
f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = e^{-|x|}\,(-\operatorname{sign}(x))\,(2\,x + 2\,y) + e^{-|x|}\,2 = e^{-|x|}\,((-\operatorname{sign}(x))\,(2\,x + 2\,y) + 2)\\
f_{yy}(x, y) &= e^{-|x|}\,2\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$H_f(2, -2) = \begin{pmatrix} 4\,e^{-2} & 2\,e^{-2} \\ 2\,e^{-2} & 2\,e^{-2} \end{pmatrix} = H_f(-2, 2).$$

Gli autovalori della matrice qui sopra sono le radici del polinomio

$$\det\begin{pmatrix} 4\,e^{-2} - \lambda & 2\,e^{-2} \\ 2\,e^{-2} & 2\,e^{-2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\,e^{-2}\,\lambda + 4\,e^{-4};$$

dall'alternanza dei segni dei coefficienti del polinomio deduco che le radici sono entrambe positive, pertanto $(2, -2)$ e $(-2, 2)$ sono punti di minimo locale.

Nota

Nella traccia proposta a chi il 10 giugno ha sostenuto la prova scritta completa (e non la seconda prova di esonero) è richiesto esplicitamente di studiare la differenziabilità della funzione assegnata; includo qui lo svolgimento.

Come già notato, f è di classe C^2 nell'insieme aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$; in tale insieme, come conseguenza del teorema del differenziale totale, f risulta differenziabile. Restano da esaminare, mediante la definizione, i punti dell'asse delle ordinate. Fisso $\beta \in \mathbb{R}$ e considero $(0, \beta)$.

Considero il rapporto incrementale di f rispetto alla prima variabile. Per ogni $t \neq 0$ si ha

$$\frac{f(0 + t, \beta) - f(0, \beta)}{t} = \frac{e^{-|t|}\,(2\,t\,\beta + \beta^2) - \beta^2}{t} = e^{-|t|}\,2\,\beta + \frac{e^{-|t|} - 1}{t}\,\beta^2\,.$$

Per $t \to 0$, il primo addendo tende a 2β; nel secondo addendo, il fattore $\dfrac{e^{-|t|}-1}{t}$ è asintoticamente equivalente a $\dfrac{-|t|}{t}$. Pertanto:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(0+t,\beta)-f(0,\beta)}{t} = 2\beta - \beta^2, \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(0+t,\beta)-f(0,\beta)}{t} = 2\beta + \beta^2.$$

Per $\beta \neq 0$ i limiti unilaterali sono diversi, quindi non esiste il limite per $t \to 0$; in $(0,\beta)$ la funzione non è derivabile parzialmente rispetto a x, dunque non è differenziabile.

Per $\beta = 0$ i limiti unilaterali sono entrambi uguali a 0, perciò in $(0,0)$ la funzione è derivabile parzialmente rispetto a x con $f_x(0,0) = 0$.

Verifico se in $(0,0)$ la funzione f è anche derivabile parzialmente rispetto a y.

Scrivo il rapporto incrementale di f rispetto alla seconda variabile. Per ogni $t \neq 0$ si ha

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2-0}{t} = t;$$

il limite per $t \to 0$ esiste ed è uguale a 0, pertanto f è derivabile parzialmente rispetto a y con $f_y(0,0) = 0$.

Ricapitolando: in $(0,0)$ la funzione f è derivabile parzialmente e ha gradiente uguale al vettore nullo; per stabilire se f è differenziabile, valuto il rapporto incrementale di f in $(0,0)$. Per $(h,k) \neq (0,0)$ si ha

$$\begin{aligned} R(h,k) &:= \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|} \\ &= \frac{e^{-|h|}\,(2\,h\,k+k^2)-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{e^{-|h|}\,(2\,h+k)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}, \end{aligned}$$

quindi

$$0 \leq |R(h,k)| \leq e^{-|h|}\,(2\,|h|+|k|)\,\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq e^{-|h|}\,(2\,|h|+|k|);$$

dal teorema di convergenza obbligata deduco facilmente che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0,$$

quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

Osservo che $(0,0)$ è dunque un punto stazionario per f, che risulta essere un punto di sella in base all'analisi del segno svolta in precedenza.

Quesito 2

Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x\,y,\ x+z,\ x^2\,z)$$

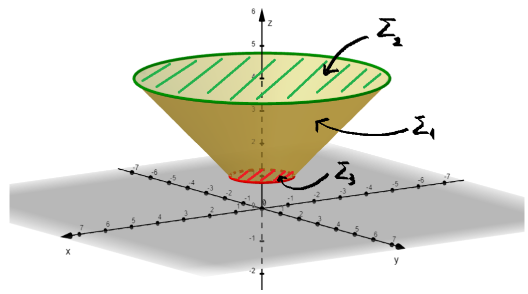
uscente attraverso la frontiera del sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ delimitato dalla superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e dai piani di equazione $z=1$ e $z=4$.

Si verifichi mediante il teorema della divergenza la correttezza del risultato ottenuto.

Svolgimento

Dato che le sue componenti sono funzioni polinomiali, il campo vettoriale F è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$.

Denoto con T il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ assegnato. Si tratta di un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, la cui frontiera è sostegno della superficie regolare a pezzi chiusa avente come facce una porzione di superficie conica e due dischi, denotati rispettivamente con Σ_1, Σ_2 e Σ_3 nella figura qui a lato.



Parametrizzo le tre facce, utilizzando i simboli σ e K di volta in volta per denotare oggetti diversi.

Scelgo la parametrizzazione di Σ_1 definita ponendo

$$\sigma(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u) \qquad\qquad (u,v)\in[1,4]\times[0,2\pi] =: K\,.$$

Per ogni $(u,v)\in K$:

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 1) \qquad\qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0),$$

quindi il vettore normale è

$$N_\sigma(u,v) = \sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u).$$

Osservo che in ogni punto il vettore normale è diretto verso l'asse z, ossia verso l'interno di T; in altre parole, la parametrizzazione scelta orienta Σ_1 negativamente. Tenuto conto di ciò, il flusso di F uscente attraverso Σ_1 è

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Sigma_1}(F) &= -\iint_K F(\sigma(u,v))\cdot N_\sigma(u,v)\,du\,dv \\
&= -\iint_K (u^2\cos v\sin v,\ u\cos v + u,\ u^3\cos^2 v)\cdot(-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)\,du\,dv \\
&= \iint_K (u^3\cos^2 v\sin v + u^2\cos v\sin v + u^2\sin v - u^4\cos^2 v)\,du\,dv\,.
\end{aligned}$$

Per ragioni di periodicità, i primi tre addendi nella funzione integranda forniscono contributo nullo; pertanto:

$$\Phi_{\Sigma_1}(F) = \iint_K -u^4 \cos^2 v \, du \, dv = -\int_1^4 u^4 \, du \int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv = -\frac{1023}{5}\pi .$$

Scelgo la parametrizzazione di Σ_2 definita ponendo

$$\sigma(u,v) = (u \cos v, \; u \sin v, \; 4) \qquad (u,v) \in [0,4] \times [0, 2\pi] =: K .$$

Per ogni $(u,v) \in K$:

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v, \; \sin v, \; 0) \qquad \sigma_v(u,v) = (-u \sin v, \; u \cos v, \; 0),$$

quindi il vettore normale è

$$N_\sigma(u,v) = \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (0, \; 0, \; u).$$

In ogni punto il vettore normale è diretto verso l'alto, ossia verso l'esterno di T; la parametrizzazione scelta orienta Σ_2 positivamente. Tenuto conto di ciò, il flusso di F uscente attraverso Σ_2 è

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Sigma_2}(F) &= \iint_K F(\sigma(u,v)) \cdot N_\sigma(u,v) \, du \, dv \\
&= \iint_K (u^2 \cos v \sin v, \; u \cos v + 4, \; 4\, u^2 \cos^2 v) \cdot (0, \; 0, \; u) \, du \, dv \\
&= \iint_K 4\, u^3 \cos^2 v \, du \, dv = \int_0^4 4\, u^3 \, du \int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv = 256\,\pi .
\end{aligned}$$

Infine, scelgo la parametrizzazione di Σ_3 definita ponendo

$$\sigma(u,v) = (u \cos v, \; u \sin v, \; 1) \qquad (u,v) \in [0,1] \times [0, 2\pi] =: K .$$

Per ogni $(u,v) \in K$:

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v, \; \sin v, \; 0) \qquad \sigma_v(u,v) = (-u \sin v, \; u \cos v, \; 0),$$

quindi il vettore normale è $N_\sigma(u,v) = \sigma_u(u,v) \times \sigma_v(u,v) = (0, \; 0, \; u)$.

In ogni punto il vettore normale è diretto verso l'alto, ossia verso l'interno di T; la parametrizzazione scelta orienta Σ_3 negativamente. Tenuto conto di ciò, il flusso di F uscente attraverso Σ_3 è

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Sigma_3}(F) &= -\iint_K F(\sigma(u,v)) \cdot N_\sigma(u,v) \, du \, dv \\
&= -\iint_K (u^2 \cos v \sin v, \; u \cos v + 1, \; u^2 \cos^2 v) \cdot (0, \; 0, \; u) \, du \, dv \\
&= -\iint_K u^3 \cos^2 v \, du \, dv = -\int_0^1 u^3 \, du \int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv = -\frac{\pi}{4} .
\end{aligned}$$

In conclusione, il flusso di F uscente attraverso la frontiera di T è

$$\Phi_{\Sigma_1}(F) + \Phi_{\Sigma_2}(F) + \Phi_{\Sigma_3}(F) = -\frac{1023}{5}\,\pi + 256\,\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{1023}{20}\,\pi\,.$$

Verifico la correttezza del risultato ottenuto applicando il teorema della divergenza. Anzitutto ricordo che la divergenza di un campo vettoriale di componenti F_1, F_2, F_3, nell'ordine, è il campo scalare

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Per il campo assegnato:

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = y + 0 + x^2 = y + x^2\,.$$

Per il teorema della divergenza, il flusso di F uscente attraverso la frontiera di T è uguale all'integrale triplo

$$\iiint_T \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Per calcolare l'integrale, utilizzo la formula di integrazione per strati:

$$\iiint_T \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_1^4 \left(\iint_{T_z} (y + x^2)\,dx\,dy\right)\,dz$$

dove, per ogni $z \in [1,4]$ la sezione T_z di T è il disco chiuso di centro l'origine e raggio z. Calcolo l'integrale doppio passando a coordinate polari:

$$\begin{aligned}
\iint_{T_z} (y + x^2)\,dx\,dy &= \iint_{[0,z]\times[0,2\pi]} (\rho\,\sin\theta + \rho^2\,\cos^2\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^z \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta + \int_0^z \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \\
&= 0 + \frac{z^4}{4}\,\pi = \frac{\pi}{4}\,z^4\,.
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\iiint_T \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_1^4 \frac{\pi}{4}\,z^4\,dz = \frac{\pi}{4}\,\left[\frac{z^5}{5}\right]_1^4 = \frac{\pi}{4}\,\frac{1023}{5} = \frac{1023}{20}\,\pi\,.$$

Quesito 3

Si consideri la curva di parametrizzazione $r(t) = (t(t-1)(2-t),\ 1-|t-1|)$, $t \in [0,2]$.

(a) Si stabilisca se la curva è regolare, semplice, chiusa e se ne disegni approssimativamente il sostegno.

(b) Si calcoli l'area del dominio regolare delimitato dal sostegno della curva.

Svolgimento

(a) Dato che $r(0) = (0,0)$ e $r(2) = (0,0)$, la curva è chiusa.

La prima componente della parametrizzazione, cioè la funzione $x(t) = t(t-1)(2-t)$, è polinomiale, quindi di classe C^∞ in $[0,2]$; la seconda componente, cioè la funzione $y(t) = 1-|t-1|$, non è derivabile in $t = 1$ (pertanto la curva non è regolare), ma è di classe C^∞ in $[0,1) \cup (1,2]$.

Per $t \in [0,1) \cup (1,2]$ si ha $y'(t) = -\mathrm{sign}(t-1) \neq 0$, quindi $r'(t) \neq (0,0)$; pertanto, la curva è regolare a tratti.

Verifico se la curva è semplice. Prendo t, s nell'intervallo $[0,2]$, con almeno uno tra t e s interno all'intervallo; per fissare le idee, suppongo $t \in (0,2)$. Suppongo $r(t) = r(s)$, cioè $x(t) = x(s)$ e $y(t) = y(s)$, cioè

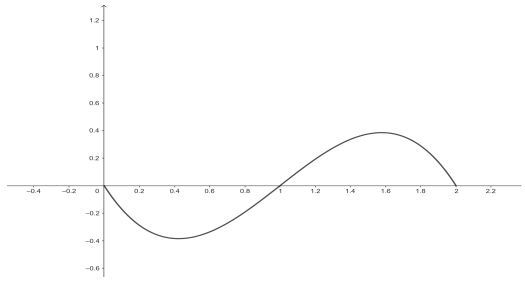
$$t(t-1)(2-t) = s(s-1)(2-s) \quad \text{e} \quad 1-|t-1| = 1-|s-1|\,.$$

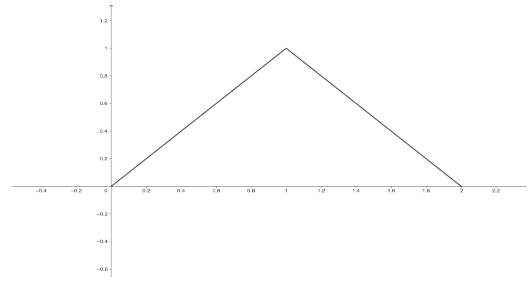
Dalla seconda uguaglianza deduco $|t-1| = |s-1|$, che è soddisfatta se $t-1 = s-1$, cioè $t = s$, oppure se $t-1 = 1-s$, cioè $s = 2-t$. In questo caso, sostituendo nella prima uguaglianza ottengo

$$t(t-1)(2-t) = (2-t)(2-t-1)(2-2+t),$$

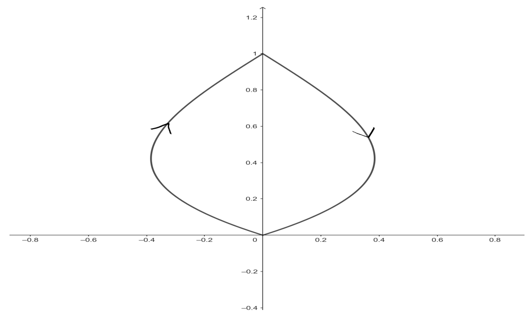
cioè $t(t-1)(2-t) = (2-t)(1-t)t$; semplificando per $t(2-t)$, che per ipotesi è diverso da 0, ricavo $t-1 = 1-t$, cioè $2t = 2$, cioè $t = 1$ e quindi $s = 2-1 = 1$. Anche in questo caso, dunque, concludo $t = s$. In conclusione, la curva è semplice.

Disegno separatamente i grafici delle due componenti. Osservando che x è una funzione polinomiale di terzo grado, che si annulla per $t \in \{0,1,2\}$, mentre y è ottenuta dalla funzione valore assoluto mediante trasformazioni elementari, è facile ottenere i grafici qui sotto (x a sinistra, y a destra):





Seguendo l'andamento delle due componenti disegno il sostegno della curva, che è percorso nel verso indicato nella figura qui a lato.



(b) Per calcolare l'area del dominio D delimitato dal sostegno della curva, utilizzo il teorema di Gauss-Green:

$$\text{area}(D) = \iint_D 1\, dx\, dy = \oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP\,,$$

dove $F = (F_1, F_2)$ è un qualsiasi campo vettoriale di classe C^1 tale che $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 1$ in D, e la circuitazione di F è calcolata utilizzando una qualsiasi parametrizzazione della frontiera di D che la orienti positivamente, cioè sia tale che percorrendo ∂D l'insieme D rimanga a sinistra.

Scelgo $F(x, y) = (0, x)$ e osservo che la parametrizzazione assegnata r induce su ∂D il verso di percorrenza opposto di quello richiesto. Pertanto:

$$\begin{aligned}
-\oint_{\partial D^+} F(P) \cdot dP &= \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt + \int_1^2 F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 (0,\ x(t)) \cdot (x'(t),\ y'(t))\, dt + \int_1^2 (0,\ x(t)) \cdot (x'(t),\ y'(t))\, dt \\
&= \int_0^1 x(t)\, y'(t)\, dt + \int_1^2 x(t)\, y'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 t(t-1)(2-t)(1)\, dt + \int_1^2 t(t-1)(2-t)(-1)\, dt \\
&= \int_0^1 (3\,t^2 - t^3 - 2\,t)\, dt - \int_1^2 (3\,t^2 - t^3 - 2\,t)\, dt \\
&= \left[t^3 - \frac{t^4}{4} - t^2\right]_0^1 - \left[t^3 - \frac{t^4}{4} - t^2\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

In conclusione: $\text{area}(D) = \dfrac{1}{2}$.

Svolgimento della prova scritta di Analisi Matematica II del 24 giugno 2025

Quesito 1

Si determini la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' - 4\,y = t\,e^{2\,t}\,, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Svolgimento

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogena associata è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4$, che ha radici reali $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$. La generica soluzione dell'equazione omogenea associata è quindi

$$c_1\,e^{2\,t} + c_2\,e^{-2\,t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Determino una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata utilizzando il metodo di somiglianza. Osservando che $\lambda = 2$ è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1, cerco una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $t\,e^{2\,t}$ della forma

$$\varphi(t) = (a\,t + b)\,e^{2\,t}\,t = (a\,t^2 + b\,t)\,e^{2\,t}\,.$$

Derivando ottengo

$$\varphi'(t) = (2\,a\,t^2 + 2\,a\,t + 2\,b\,t + b)\,e^{2\,t}\,, \quad \varphi''(t) = (4\,a\,t^2 + 8\,a\,t + 4\,b\,t + 2\,a + 4\,b)\,e^{2\,t}\,;$$

sostituendo nell'equazione:

$$(4\,a\,t^2 + 8\,a\,t + 4\,b\,t + 2\,a + 4\,b)\,e^{2\,t} - 4\,(a\,t^2 + b\,t)\,e^{2\,t} = t\,e^{2\,t}\,,$$

cioè $(8\,a\,t + 2\,a + 4\,b)\,e^{2\,t} = t\,e^{2\,t}$, che equivale a $8\,a\,t + 2\,a + 4\,b = t$.
Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $8\,a = 1$ e $2\,a + 4\,b = 0$, cioè $a = \dfrac{1}{8}$ e $b = -\dfrac{1}{16}$, dunque:

$$\varphi(t) = \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)\,e^{2\,t}\,.$$

La generica soluzione dell'equazione assegnata è

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2\,e^{-2\,t} + \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)\,e^{2\,t} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy assegnato, calcolo

$$y'(t) = 2\,c_1\,e^{2\,t} - 2\,c_2\,e^{-2\,t} + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{1}{16}\right)\,e^{2\,t} + 2\,\left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)\,e^{2\,t}$$

e impongo le condizioni iniziali:

$$0 = y(0) = c_1 + c_2\,, \qquad 0 = y'(0) = 2\,c_1 - 2\,c_2 - \tfrac{1}{16}\,;$$

ottengo dunque $c_1 = \dfrac{1}{64}$ e $c_2 = -\dfrac{1}{64}$.

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$y(t) = \frac{e^{2\,t}}{64} - \frac{e^{-2\,t}}{64} + \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{16}\right)\,e^{2\,t} \qquad\qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Quesito 2 (valido per il recupero della **seconda prova di esonero**)

Si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}^2$ ponendo $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y$.

(a) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f.

(b) Si determinino gli estremi globali di f nel triangolo di vertici $(-3,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$.

Svolgimento

(a) La funzione assegnata è di tipo polinomiale, pertanto è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f_x(x,y) = 3\,x^2 - 3\,y \qquad\qquad f_y(x,y) = 3\,y^2 - 3\,x\,.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricavo $y = x^2$; sostituendo nella seconda ottengo $x^4 - x = 0$, ossia $x(x^3-1) = 0$, che ha soluzioni $x = 0$ e $x = 1$. Dunque, i punti stazionari di f sono $(0,0)$ e $(1,1)$.

Per classificare i punti stazionari determino il segno degli autovalori della matrice hessiana.

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f_{xx}(x, y) = 6\,x \qquad\qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3 \qquad\qquad f_{yy}(x, y) = 6\,y\,.$$

Pertanto:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di $H_f(0, 0)$ sono le radici del polinomio

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -3 \\ -3 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9,$$

dunque sono discordi; ne deduco che $(0, 0)$ è un punto di sella.

Gli autovalori di $H_f(0, 0)$ sono le radici del polinomio

$$\det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = (6 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\,\lambda + 27;$$

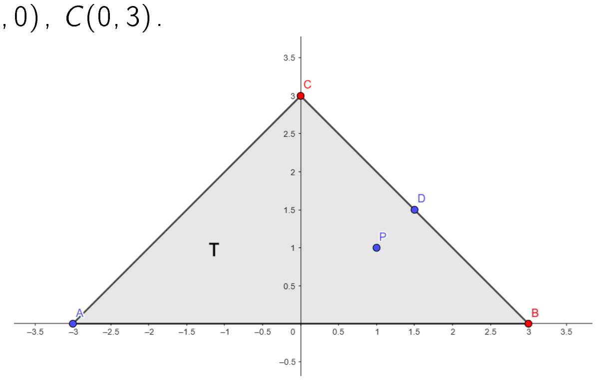
dall'alternanza dei segni dei coefficienti del polinomio deduco che le radici sono entrambe positive, pertanto $(1, 1)$ è un punto di minimo locale.

Anche se non è richiesto esplicitamente nella traccia, osservo che f non ha estremi globali in $\mathbb{R}^2$, in quanto è illimitata sia inferiormente che superiormente; ciò si riconosce per esempio valutando il limite

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, 0) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty.$$

(b) Denoto con T il triangolo di vertici $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3)$.

Dato che T è un insieme chiuso e limitato, dunque compatto, e la restrizione di f a T è una funzione continua, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza degli estremi globali di f in T. I punti di estremo vanno ricercati tra i punti stazionari interni a T e i punti di frontiera di T.



L'unico punto stazionario di f interno a T è $P(1, 1)$, che come visto è punto di minimo locale per f, dunque candidato punto di minimo globale per f in T.

La frontiera di T è unione dei tre lati AB, AC e CB, che parametrizzo facilmente.

La restrizione di f al lato AB è $g_1(t) := f(t, 0) = t^3$, con $t \in [-3, 3]$. Tale funzione (elementare!) è crescente, pertanto A è candidato punto di minimo globale per f in T, mentre B è candidato punto di massimo globale per f in T. (Per inciso, noto che per $t = 0$, ossia in $(0, 0)$, la restrizione di f al lato AB presenta un punto di sella, in coerenza con la classificazione precedente di $(0, 0)$.)

La restrizione di f al lato AC è $g_2(t) := f(t, t + 3) = t^3 + (t + 3)^3 - 3(t^2 + 3t)$, con $t \in [-3, 0]$. Risulta $g_2'(t) = 3t^2 + 3(t + 3)^2 - 3(2t + 3) = 6t^2 + 12t + 18$. È immediato riconoscere che il polinomio a destra è sempre positivo, dunque g_2 è crescente; pertanto, oltre ad A, già candidato punto di minimo globale per f in T, ottengo che C è candidato punto di massimo globale per f in T.

La restrizione di f al lato CB è $g_3(t) := f(t, 3 - t) = t^3 + (3 - t)^3 - 3(3t - t^2)$, con $t \in [0, 3]$. Risulta $g_3'(t) = 3t^2 - 3(3 - t)^2 - 3(3 - 2t) = 24t - 36$. È immediato riconoscere che il polinomio a destra è nullo per $t = 3/2$, negativo per $t \in [0, 3/2)$, positivo per $t \in (3/2, 3]$, dunque g_3 è decrescente in $[0, 3/2]$ e crescente in $[3/2, 3]$. Pertanto, oltre a B e C, già candidati punti di massimo globale per f in T, ottengo che $D(3/2, 3/2)$ è candidato punto di minimo globale per f in T.

Valutando f nei candidati punti di minimo globale ho $f(1, 1) = -1$, $f(-3, 0) = -27$, $f(3/2, 3/2) = 0$; concludo che $\min_T f = -27$. Valutando f nei candidati punti di massimo globale ho $f(3, 0) = 27$, $f(0, 3) = 27$; concludo che $\max_T f = 27$.

Quesito 3 (valido per il recupero della **seconda prova di esonero**)

Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x\,y,\ x + z,\ x^2\,z)$$

entrante nella porzione della superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimitata dai piani di equazione $z = 1$ e $z = 4$.

Svolgimento

Dato che le sue componenti sono funzioni polinomiali, il campo vettoriale F è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Il rotore di F è dunque un campo vettoriale continuo in $\mathbb{R}^3$; lo determino calcolando il determinante simbolico

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x\,y & x + z & x^2\,z \end{vmatrix} = (-1,\ -2\,x\,z,\ 1 - x).$$

La superficie conica Σ è una superficie orientabile, dunque ha senso calcolare il flusso di un campo vettoriale attraverso Σ. Scelgo la parametrizzazione di Σ definita ponendo

$$\sigma(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u) \qquad (u,v) \in [1,4]\times[0,2\pi] =: K\,.$$

Per ogni $(u,v) \in K$:

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v,\ \sin v,\ 1) \qquad \sigma_v(u,v) = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0),$$

quindi il vettore normale è

$$N_\sigma(u,v) = \sigma_u(u,v)\times\sigma_v(u,v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u).$$

Osservo che in ogni punto il vettore normale è diretto verso l'asse z, ossia verso il cono; la parametrizzazione di Σ è dunque coerente con il verso richiesto per il flusso. Risulta:

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) &= \iint_K \operatorname{rot} F(\sigma(u,v)) \cdot N_\sigma(u,v)\, du\, dv \\
&= \iint_K (-1,\ -2u^2\cos v,\ 1-u\cos v)\cdot(-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)\, du\, dv \\
&= \iint_K (u\cos v + 2u^3\cos v\sin v + u - u^2\cos v)\, du\, dv \\
&= \int_1^4 (u-u^2)\, du \int_0^{2\pi}\cos v\, dv + \int_1^4 u^3\, du\int_0^{2\pi}\sin(2v)\, dv + \int_1^4 u\, du\int_0^{2\pi} dv.
\end{aligned}$$

Per ragioni di periodicità, gli integrali delle funzioni trigonometriche sono uguali a 0, pertanto:

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \int_1^4 u\, du\int_0^{2\pi} dv = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 2\pi = 15\,\pi.$$

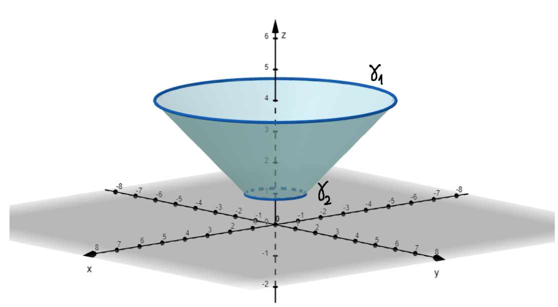
In alternativa, posso calcolare il flusso richiesto utilizzando il teorema di Stokes.

Riconosco infatti che Σ è sostegno di una superficie regolare con bordo, il cui bordo è costituito dall'unione della circonferenza γ_1 parametrizzata da

$r_1(t) = (4\cos t, 4\sin t, 4) \qquad t \in [0,2\pi]$

e la circonferenza γ_2 parametrizzata da

$r_2(t) = (\cos t, \sin t, 1) \qquad t \in [0,2\pi]$.



Siccome è richiesto il flusso *entrante* attraverso Σ, orientare positivamente il bordo $\partial\Sigma$ significa parametrizzare entrambe le circonferenze in modo che percorrendole ci si lasci a sinistra la faccia di Σ rivolta verso l'interno del cono; noto che r_2 induce su γ_2 il verso di percorrenza opposto a quello richiesto. Pertanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) &= \int_{\partial\Sigma^+} F(P)\cdot dP = \int_{\gamma_1} F(P)\cdot dP - \int_{\gamma_2} F(P)\cdot dP \\
&= \int_0^{2\pi} F(r_1(t))\cdot r_1'(t)\,dt - \int_0^{2\pi} F(r_2(t))\cdot r_2'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (16\cos t\,\sin t,\ 4\cos t + 4,\ 64\cos^2 t)\cdot(-4\sin t,\ 4\cos t,\ 0)\,dt + \\
&\qquad\qquad - \int_0^{2\pi} (\cos t\,\sin t,\ \cos t + 1,\ \cos^2 t)\cdot(-\sin t,\ \cos t,\ 0)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-64\cos t\,\sin^2 t + 16\cos^2 t + 16\cos t)\,dt - \int_0^{2\pi} (-\cos t\,\sin^2 t + \cos^2 t + \cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-63\cos t\,\sin^2 t + 15\cos^2 t + 15\cos t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Per ragioni di periodicità, gli integrali del primo e terzo addendo sono uguali a 0, pertanto:

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = 15\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = 15\,\pi.$$

Quesito 4 (valido per il recupero della **seconda prova di esonero**)

Si calcoli l'integrale del campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,,\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

sulla curva grafico associata alla funzione definita ponendo $g(x) = 1 - x^2$ per ogni $x \in [-1,1]$.

[Solo per il recupero della seconda prova di esonero: si verifichi la correttezza del risultato ottenuto, ricalcolando l'integrale mediante un procedimento alternativo.]

Svolgimento

Il campo vettoriale assegnato è definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, dove risulta continuo (in effetti, di classe C^∞, visto che le sue componenti sono funzioni razionali). La curva assegnata, in quanto curva grafico associata a una funzione di classe C^1, è una curva regolare; inoltre, è immediato riconoscere che il suo sostegno γ, ossia il grafico di g, è contenuto nel dominio di F.

Dunque, l'integrale proposto è ben definito. Lo calcolo attraverso la definizione di integrale curvilineo, utilizzando la parametrizzazione "standard" della curva grafico, cioè

$$r(t) = (t, g(t)) = (t, 1 - t^2) \qquad t \in [-1, 1].$$

Risulta:

$$\int_\gamma F(P) \cdot dP = \int_{-1}^{1} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{(t^2 + (1-t^2)^2)^2}, \frac{1-t^2}{(t^2 + (1-t^2)^2)^2} \right) \cdot (1, -2\,t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{t}{(t^2 + (1-t^2)^2)^2} - \frac{2\,t\,(1-t^2)}{(t^2 + (1-t^2)^2)^2} \right) dt = \int_{-1}^{1} \frac{2\,t^3 - t}{(t^2 + (1-t^2)^2)^2}\, dt\,.$$

Osservo che la funzione integranda è dispari, e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; da questo deduco immediatamente che l'integrale è uguale a 0.

Come procedimento alternativo, provo a utilizzare la Formula Fondamentale del Calcolo per campi vettoriali conservativi. Siccome il dominio di F non è un insieme semplicemente connesso, se anche F fosse un campo vettoriale chiuso (e lo è, come si verifica facilmente), ciò non garantirebbe che sia conservativo. Verifico che lo è direttamente, a norma di definizione, ossia cercandone un potenziale, che poi utilizzerò per applicare la Formula.

Cerco dunque una funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tale che

$$f_x(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \qquad\qquad f_y(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

Dalla prima uguaglianza, integrando rispetto a x, deduco

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2 + y^2} + h(y)\,;$$

derivando rispetto a y e sostituendo nella seconda uguaglianza ottengo

$$\frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + h'(y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}\,,$$

ossia $h'(y) = 0$. Ne deduco che h è una funzione costante; scelgo $h(y) \equiv 0$.

In conclusione, la funzione definita ponendo

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\,(x^2 + y^2)} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

è un potenziale di F. Applicando la Formula Fondamentale del Calcolo ottengo

$$\int_\gamma F(P) \cdot dP = f(r(1)) - f(r(-1)) = f(1, 0) - f(-1, 0) = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

Svolgimento della prova scritta di Analisi Matematica II dell'8 luglio 2025

Quesito 1

Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 2\cos t + t\sin t\,.$$

Svolgimento

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogena associata è $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$, che ha radici complesse coniugate $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. La generica soluzione dell'equazione omogenea associata è quindi

$$c_1\cos t + c_2\sin t \qquad t \in \mathbb{R}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Determino una soluzione particolare dell'equazione non omogenea assegnata utilizzando il metodo di somiglianza. Osservando che $\lambda = i$ è radice del polinomio caratteristico con molteplicità 1, cerco una soluzione particolare dell'equazione con termine noto $2\cos t + t\sin t$ della forma

$$\varphi(t) = \big((a\,t + b)\cos t + (c\,t + d)\sin t\big)\,t = (a\,t^2 + b\,t)\cos t + (c\,t^2 + d\,t)\sin t\,.$$

Derivando ottengo

$$\varphi'(t) = (2\,a\,t + b)\cos t - (a\,t^2 + b\,t)\sin t + (2\,c\,t + d)\sin t + (c\,t^2 + d)\cos t$$

e

$$\begin{aligned}\varphi''(t) = 2\,a\cos t - 2\,(2\,a\,t + b)\sin t - (a\,t^2 + b\,t)\cos t + 2\,c\sin t\,+\\ + 2\,(2\,c\,t + d)\cos t - (c\,t^2 + d)\sin t\end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione:

$$\begin{aligned}2\,a\cos t - 2\,(2\,a\,t + b)\sin t - (a\,t^2 + b\,t)\cos t + 2\,c\sin t + 2\,(2\,c\,t + d)\cos t - (c\,t^2 + d)\sin t\,+\\ + (a\,t^2 + b\,t)\cos t + (c\,t^2 + d\,t)\sin t = 2\cos t + t\sin t\,,\end{aligned}$$

cioè

$$2\,a\cos t - 2\,(2\,a\,t + b)\sin t + 2\,c\sin t + 2(2\,c\,t + d)\cos t = 2\cos t + t\sin t\,.$$

Questa uguaglianza è soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$2\,a + 2\,(2\,c\,t + d) = 2, \qquad -2\,(2\,a\,t + b) + 2\,c = t\,,$$

cioè se e solo se

$$4\,c=0,\quad 2\,a+2\,d=2,\quad -4\,a=1,\quad -2\,b+2\,c=0\,,$$

ossia $c=b=0\,,\ a=-\dfrac{1}{4}\,,\ d=\dfrac{5}{4}\,.$

Dunque: $\varphi(t)=-\dfrac{t^2}{4}\,\cos t+\dfrac{5\,t}{4}\,\sin t$ e la generica soluzione dell'equazione assegnata è

$$y(t)=c_1\,\cos t+c_2\,\sin t-\frac{t^2}{4}\,\cos t+\frac{5}{4}\,t\,\sin t \qquad\qquad t\in\mathbb{R}$$

con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Quesito 2

Si consideri la funzione definita ponendo

$$f(x,y)=\begin{cases} x^3\ln(x^2+y^2) & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\ \quad 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Si studi la differenziabilità di f.

(b) Si determinino e classifichino i punti stazionari di f.

Svolgimento

(a) La restrizione di f all'insieme aperto $A:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ è di classe C^∞, in quanto composta di funzioni polinomiali e della funzione logaritmo. In particolare, essendo di classe C^1 in A, cioè avendo derivate parziali continue, f risulta differenziabile in A come conseguenza del teorema del differenziale totale.

Resta da esaminare, mediante la definizione, se f è differenziabile anche in $(0,0)$. Anzitutto verifico se è derivabile parzialmente.

Considero il rapporto incrementale di f rispetto alla prima variabile. Si ha

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^3\,\ln(t^2+0^2)-0}{t}=\lim_{t\to0}t^2\,\ln(t^2)=0\,;$$

nell'ultima uguaglianza ho tenuto conto del limite notevole $\lim\limits_{s\to0^+}s\,\ln(s)=0$. Dunque, f è derivabile parzialmente rispetto a x in $(0,0)$ con $f_x(0,0)=0$.

Inoltre:

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0\,,$$

quindi f è derivabile parzialmente rispetto a y in $(0,0)$ con $f_y(0,0)=0$.

Ricapitolando: in $(0,0)$ la funzione f è derivabile parzialmente e ha gradiente uguale al vettore nullo; per stabilire se è differenziabile, valuto il rapporto incrementale di f in $(0,0)$.

Per $(h,k) \neq (0,0)$ si ha

$$R(h,k) := \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{h^3 \ln(h^2+k^2) - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^3 \ln(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

pertanto

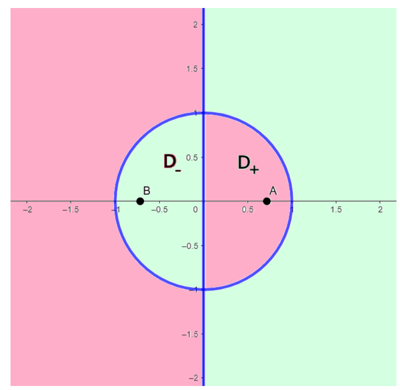
$$0 \leq |R(h,k)| = \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \, \frac{h^2}{h^2+k^2} \, (h^2+k^2) \ln(h^2+k^2) \leq (h^2+k^2) \ln(h^2+k^2).$$

Osservando che per $(h,k) \to (0,0)$ si ha $(h^2+k^2) \ln(h^2+k^2) \to 0$ (per il limite notevole già ricordato), dal teorema di convergenza obbligata deduco immediatamente

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h,k) = 0,$$

quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

In conclusione, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.



(b) Per quanto discusso nel punto precedente, $(0,0)$ è un punto stazionario per f. Noto che $f(0,0) = 0$; dal segno di f, rappresentato nella figura qui a lato (in blu: $f = 0$; in verde: $f > 0$; in rosa: $f < 0$), deduco che $(0,0)$ è un punto di sella.

Determino ora i punti stazionari in A. Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si ha

$$f_x(x,y) = 3\,x^2 \ln(x^2+y^2) + \frac{2\,x^4}{x^2+y^2} \qquad f_y(x,y) = \frac{2\,x^3\,y}{x^2+y^2}.$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x^2 \left(3\,(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) + 2\,x^2\right) = 0 \\ x^3\,y = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta per $x = 0$ oppure $y = 0$. Se $x = 0$ la prima equazione è soddisfatta per ogni $y \neq 0$. Se $y = 0$ (e $x \neq 0$) la prima equazione equivale a $3\,x^2 \ln(x^2) + 2\,x^2 = 0$, che equivale a $3 \ln(x^2) + 2 = 0$, soddisfatta per $x^2 = e^{-2/3}$, ossia $x = \pm e^{-1/3}$.

Ricapitolando, i punti stazionari in A sono $(0,\beta)$ per $\beta \neq 0$ e $(\pm e^{-1/3}, 0)$.

Dato che $f(0,\beta)=0$ per ogni $\beta\neq 0$, dal segno di f deduco che questi punti sono tutti di sella (come $(0,0)$, del resto).

Classifico i punti $A(e^{-1/3},0)$ e $B(e^{-1/3},0)$ utilizzando la matrice hessiana. Con calcoli elementari ottengo

$$H_f(A)=\begin{pmatrix}6\,e^{-1/3} & 0\\ 0 & 2\,e^{-1/3}\end{pmatrix}\qquad H_f(B)=\begin{pmatrix}-6\,e^{-1/3} & 0\\ 0 & -2\,e^{-1/3}\end{pmatrix}.$$

Trattandosi di matrici diagonali, gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale principale. Dato che gli autovalori di $H_f(A)$ sono entrambi positivi, il punto A è di minimo locale; dato che gli autovalori di $H_f(B)$ sono entrambi negativi, il punto B è di massimo locale.

In alternativa, posso ragionare come segue. Considero l'insieme $D_+=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\big\}$, che è compatto in quanto chiuso e limitato. Dato che f è continua (in quanto differenziabile) in $\mathbb{R}^2$, la sua restrizione a D_+ è una funzione continua. Per il teorema di Weierstrass, $f_{|D_+}$ ammette massimo e minimo globale. Siccome f è identicamente nulla sulla frontiera di D_+ e negativa all'interno di D_+, riconosco immediatamente che il massimo di f in D_+ è 0, assunto in tutti i punti della frontiera ∂D_+; ne consegue che il minimo globale di $f_{|D_+}$ è assunto in un punto interno a D_+, che per il teorema di Fermat è necessariamente un punto stazionario di f. Siccome l'unico punto stazionario di f interno a D_+ è A, deduco che A è punto di minimo globale per $f_{|D_+}$ e quindi punto di minimo locale per f.

In modo analogo, considerando l'insieme $D_-=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 1,\ x\leq 0\big\}$, deduco che B è punto di massimo locale per f.

Anche se non è richiesto esplicitamente nella traccia, osservo che f non ha estremi globali in $\mathbb{R}^2$, in quanto è illimitata sia inferiormente che superiormente; ciò si riconosce per esempio valutando il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0)=\lim_{x\to\pm\infty} x^3\ln(x^2)=\pm\infty\,.$$

Quesito 3

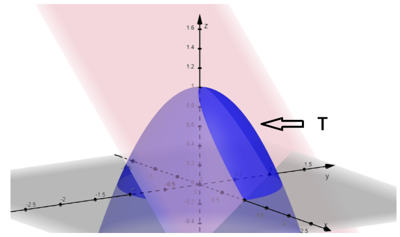
Si calcoli l'integrale triplo della funzione definita ponendo $f(x,y,z)=x\,y$ nella regione dello spazio, contenuta nel primo ottante, delimitata dal piano di equazione $x+y+z=1$ e dal paraboloide di equazione $z=1-x^2-y^2$.

Nota: a seconda della formula di riduzione utilizzata per il calcolo dell'integrale, può essere utile tenere presente l'uguaglianza

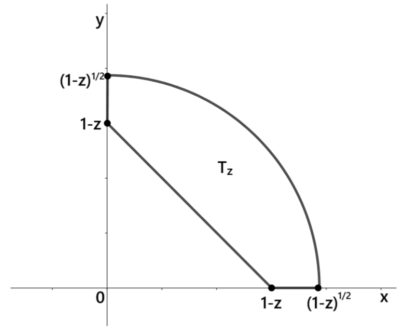
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t+\sin t}{(\cos t+\sin t)^4}\,dt=\frac{1}{6}\,\cdot$$

Svolgimento

Denoto con T l'insieme assegnato, rappresentato nella figura a lato; osservo che è compreso tra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$.



Per $z \in [0, 1]$ denoto con T_z la sezione di T corrispondente alla quota z, cioè $T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in T\}$.
Per $z \in (0, 1)$ la sezione T_z è rappresentata nella figura a lato; osservo che per $z = 0$ si ha $1 - z = (1 - z)^{1/2} = 1$, mentre per $z = 1$ si ha $1 - z = (1 - z)^{1/2} = 0$, quindi T_1 si riduce all'insieme $\{(0, 0)\}$.



Applico la formula di integrazione per strati:

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\iint_{T_z} x\, y\, dx\, dy \right) dz\,.$$

Per calcolare l'integrale doppio su T_z utilizzo coordinate polari di centro l'origine:

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta\,.$$

In tali coordinate la retta di equazione $x + y = 1 - z$ diventa $\rho \cos\theta + \rho \sin\theta = 1 - z$, ossia

$$\rho = \frac{1 - z}{\cos\theta + \sin\theta}\,,$$

mentre la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1 - z$ diventa $\rho = \sqrt{1 - z}$; pertanto, l'insieme T_z diventa

$$\widetilde{T}_z = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,, \quad \frac{1 - z}{\cos\theta + \sin\theta} \le \rho \le \sqrt{1 - z} \right\}.$$

Dunque:

$$\iint_{T_z} x\, y\, dx\, dy = \iint_{\widetilde{T}_z} \rho \cos\theta\, \rho \sin\theta\, \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left(\int_{\frac{1-z}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\sqrt{1-z}} \rho^3\, d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\frac{1-z}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\sqrt{1-z}} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left((1 - z)^2 - \frac{(1 - z)^4}{(\cos\theta + \sin\theta)^4} \right) d\theta$$

$$= \frac{(1 - z)^2}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta - \frac{(1 - z)^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta \sin\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^4}\, d\theta\,.$$

Tenuto conto del suggerimento, ottengo

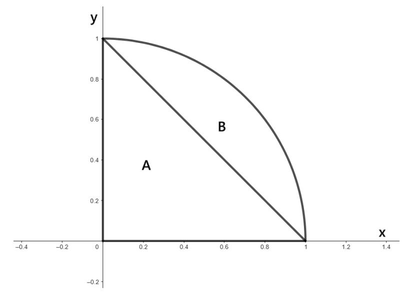
$$\iint_{T_z} x\,y\,dx\,dy = \frac{(1-z)^2}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} - \frac{(1-z)^4}{4}\,\frac{1}{6} = \frac{(1-z)^2}{8} - \frac{(1-z)^4}{24}\,.$$

Dunque:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{T_z} x\,y\,dx\,dy\right) dz = \int_0^1 \left(\frac{(1-z)^2}{8} - \frac{(1-z)^4}{24}\right) dz$$

$$= \left[-\frac{(1-z)^3}{24} + \frac{(1-z)^5}{120}\right]_0^1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{1}{30}.$$

In alternativa, posso utilizzare la formula di integrazione per fili. Devo preliminarmente descrivere l'insieme T come insieme normale, per esempio rispetto al piano $x\,y$. Considero gli insiemi A e B rappresentati nella figura a lato e definisco le funzioni $\gamma(x,y) = 1-x-y$ e $\delta(x,y) = 1-x^2-y^2$.



Risulta

$$T = \big\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in A\,,\ \gamma(x,y)\le z\le \delta(x,y)\big\} \cup \big\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in B\,,\ 0\le z\le \delta(x,y)\big\}$$

Integrando per fili:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \Big(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} x\,y\,dz\Big) dx\,dy + \iint_B \Big(\int_0^{\delta(x,y)} x\,y\,dz\Big) dx\,dy$$

$$= \iint_A x\,y\,\big(\delta(x,y)-\gamma(x,y)\big)\,dx\,dy + \iint_B x\,y\,\delta(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{A\cup B} x\,y\,\delta(x,y)\,dx\,dy - \iint_A x\,y\,\gamma(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Il primo integrale si calcola facilmente utilizzando coordinate polari:

$$\iint_{A\cup B} x\,y\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,1]\times[0,\pi/2]} \rho\,\cos\theta\,\rho\,\sin\theta\,(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^1 (\rho^3-\rho^5)\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,\sin\theta\,d\theta = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{24}\,.$$

Per calcolare il secondo integrale, descrivo A come insieme normale rispetto all'asse x, cioè

$$A = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1\,,\quad 0\le y\le 1-x\big\}\,,$$

e integro per verticali:

$$\iint_A x\,y\,\gamma(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\,y\,(1-x-y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x\,(1-x)\,y - x\,y^2)\,dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x\,(1-x)\,\frac{(1-x)^2}{2} - x\,\frac{(1-x)^3}{3} \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x\,\frac{(1-x)^3}{2} - x\,\frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{6}\,(1-x)^3\,dx$$
$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (x - 3\,x^2 + 3\,x^3 - x^4)\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{120}\,.$$

Sottraendo i valori ottenuti:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{1}{30}\,,$$

come già calcolato.

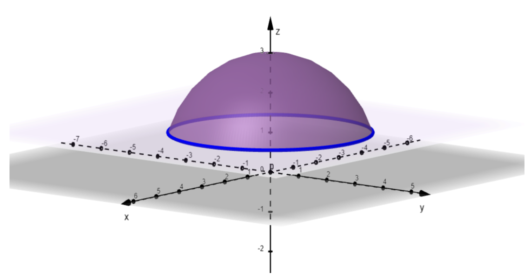
Quesito 4

Sia Σ la porzione della sfera di equazione di centro l'origine e raggio 3 posta al di sopra del piano di equazione $z = 1$. Si calcoli il flusso che attraversa Σ dall'alto verso il basso del rotore del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2\,y,\ y\,z,\ 3\,y^2)$.

Svolgimento

Dato che le sue componenti sono funzioni polinomiali, il campo vettoriale F è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$.
Il rotore di F è dunque un campo vettoriale continuo in $\mathbb{R}^3$; lo determino calcolando il determinante simbolico

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2\,y & y\,z & 3\,y^2 \end{vmatrix} = (5\,y,\ 0,\ -x^2).$$



La superficie assegnata Σ è una calotta sferica, dunque una superficie orientabile, pertanto ha senso calcolare il flusso di un campo vettoriale attraverso Σ.
Parametrizzo Σ come grafico della funzione definita ponendo $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ nell'insieme $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 8\right\}$. Scelgo dunque la parametrizzazione

$$\sigma(u,v) = (u,\ v,\ f(u,v)) \qquad\qquad (u,v) \in K\,;$$

ricordo che per ogni $(u,v) \in K$ il vettore normale è

$$N_\sigma(u,v) = (-f_u(u,v),\ -f_v(u,v),\ 1) = \left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}},\ \frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}},\ 1 \right).$$

In ogni punto il vettore normale è diretto verso l'alto (in quanto la terza componente è positiva), perciò la parametrizzazione scelta induce su Σ l'orientazione opposta rispetto a quella richiesta per il calcolo del flusso.

Risulta dunque:

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) &= -\iint_K \operatorname{rot} F(\sigma(u,v)) \cdot N_\sigma(u,v)\, du\, dv \\
&= -\iint_K (5\,v,\ 0,\ -u^2) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}},\ \frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}},\ 1 \right) du\, dv \\
&= \iint_K \left(-\frac{5\,u\,v}{\sqrt{9-u^2-v^2}} + u^2 \right) du\, dv
\end{aligned}$$

Utilizzando coordinate polari ottengo

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) &= \iint_{[0,2\sqrt{2}]\times[0,2\pi]} \left(-\frac{5\,\rho^2\,\cos\theta\,\sin\theta}{\sqrt{9-\rho^2}} + \rho^2\,\cos^2\theta \right) \rho\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\sqrt{2}} -\frac{5\,\rho^3}{\sqrt{9-\rho^2}}\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta\,\sin\theta\, d\theta + \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

Per ragioni di periodicità, il secondo fattore nel primo addendo è uguale a 0, pertanto:

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\sqrt{2}} \pi = 16\,\pi.$$

In alternativa, posso calcolare il flusso richiesto utilizzando il teorema di Stokes.

Riconosco infatti che Σ è sostegno di una superficie regolare con bordo, il cui bordo è costituito dalla circonferenza γ parametrizzata da

$$r(t) = (2\sqrt{2}\,\cos t,\ 2\sqrt{2}\,\sin t,\ 1) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Siccome è richiesto il flusso diretto dall'alto verso il basso, orientare positivamente il bordo $\partial\Sigma$ significa parametrizzare la circonferenza in modo che percorrendola ci si lasci a sinistra la faccia di Σ rivolta verso l'origine degli assi; noto che r induce su γ verso di percorrenza opposto a quello richiesto. Pertanto:

$$\begin{aligned}\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) &= \int_{\partial\Sigma^+} F(P)\cdot dP = -\int_\gamma F(P)\cdot dP = -\int_0^{2\pi} F(r(t))\bullet r'(t)\,dt \\ &= -\int_0^{2\pi}(16\sqrt{2}\cos^2 t\sin t,\ 2\sqrt{2}\sin t,\ 24\sin^2 t)\bullet(-2\sqrt{2}\sin t,\ 2\sqrt{2}\cos t,\ 0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}(64\cos^2 t\sin^2 t - 8\cos t\sin t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Per ragioni di periodicità, l'integrale del secondo addendo è uguale a 0, pertanto:

$$\Phi_\Sigma(\operatorname{rot} F) = \int_0^{2\pi} 64\cos^2 t\sin^2 t\,dt = 16\int_0^{2\pi}\sin^2(2\,t)\,dt = 16\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\,t)}{2}\,dt = 16\,\pi,$$

come già calcolato.

Osservo infine che, come conseguenza del teorema di Stokes, si può calcolare il flusso richiesto anche sostituendo Σ con una qualsiasi superficie regolare con bordo avente lo stesso bordo di Σ; per esempio, si potrebbe considerare la superficie avente come sostegno l'insieme $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 8,\ z=1\right\}$.