

a.a. 2023/2024

Laurea triennale in Fisica

Corso di Analisi Matematica II

Funzioni tra spazi vettoriali euclidei: calcolo differenziale

Avvertenza

Al termine della lezione queste pagine verranno rese disponibili online;
non è quindi necessario copiarne il contenuto.

Derivate direzionali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$).

Sia \bar{x} un punto interno di A . Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$.

versore, direzione



Diciamo che f è derivabile in \bar{x} nella direzione \mathbf{v} se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t \mathbf{v}) - f(\bar{x})}{t} =: \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{x}) \quad \begin{array}{l} \text{derivata di } f \text{ in } \bar{x} \\ \text{nella direzione } \mathbf{v} \end{array}$$

Osservazione

Dato che \bar{x} è interno ad A , esiste $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{x}) \subseteq A$.

Per ogni $t \in (-r, r)$ è lecito valutare f nel punto $\bar{x} + t \mathbf{v}$, che appartiene a $B_r(\bar{x})$. Pertanto, la funzione rapporto incrementale

$$(*) \quad t \mapsto \frac{f(\bar{x} + t \mathbf{v}) - f(\bar{x})}{t}$$

è definita in $(-r, r) \setminus \{0\}$ e ha senso considerarne il limite per $t \rightarrow 0$.

↙ non è detto che esista o che sia finito

Esempi

Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili nei punti e nelle direzioni assegnate:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (3, 1) \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - 1|(x_1 + x_2)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (1, 3) \quad \mathbf{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\mathbf{v} = (0, 1)$$

Osservazione

Con le notazioni di pag. 1, definiamo la funzione $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$g(t) := f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}).$$

Notiamo che g è una funzione reale di una variabile reale; è la restrizione di f a un segmento, “centrato” in $\bar{\mathbf{x}}$, giacente sulla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata dalla direzione \mathbf{v} .

Possiamo riscrivere la funzione rapporto incrementale $(*)$ in termini di g :

$$t \in (-r, r) \setminus \{0\} \mapsto \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} = \frac{g(t) - g(0)}{t}.$$

Deduciamo immediatamente:

- f è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v} se e solo se g è derivabile in $t = 0$;
- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = g'(0)$.

Riesaminare gli esempi ...

Derivate parziali

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ un punto interno di A .

Sia \mathbf{e}_i l' i -esimo elemento della base canonica di \mathbb{R}^n ; notiamo che $\|\mathbf{e}_i\| = 1$.

Se f è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{e}_i , diciamo che f è derivabile parzialmente in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto alla i -esima variabile; la derivata di f in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{e}_i si chiama derivata parziale in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto alla i -esima variabile e si denota con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}), \quad D_i f(\bar{\mathbf{x}}), \quad f_{x_i}(\bar{\mathbf{x}}) \qquad \text{invece di} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(\bar{\mathbf{x}})$$

Esplicitando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{e}_i) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + t, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)}{t} \end{aligned}$$

perciò: la derivata parziale rispetto alla variabile x_i si ottiene considerando come fissate tutte le altre variabili e derivando rispetto a x_i .

Esempi

Calcolare (dove possibile) le derivate parziali delle seguenti funzioni.

- $f(x, y) = 8xy + 5x^4y^2 - y^3$
- $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = x^2(2 + |y - 1|)$
- $f(x, y) = \begin{cases} x(y + 3) & x \neq 0 \\ y^2 & x = 0 \end{cases}$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia \bar{x} un punto interno di A in cui f è derivabile parzialmente **rispetto a tutte le variabili**. Per brevità diremo: “derivabile parzialmente”.

Il vettore di \mathbb{R}^n le cui componenti sono, nell'ordine, le derivate parziali di f in \bar{x} rispetto alle variabili x_1, \dots, x_n si chiama **gradiente di f in \bar{x}** e si denota con il simbolo **$\nabla f(\bar{x})$** , o anche con **$\text{grad} f(\bar{x})$** , **$Df(\bar{x})$** .

Esplicitando:

$$\nabla f(\bar{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

Esempio

Scrivere il gradiente di $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - z)$ in $(1, 1, -1)$.

↓ cioè in tutti i punti di B

Se $B \subseteq \text{int}(A)$ e f è derivabile parzialmente in B , chiamiamo **funzione gradiente di f** la funzione vettoriale che a ogni $x \in B$ associa il gradiente di f in x .

Esempio (importante)

Verificare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

è derivabile in qualsiasi direzione nel punto $(0, 0)$.

Come già visto: f non è continua in $(0, 0)$!

Osservazione

L'esempio precedente mostra che per le funzioni di più variabili reali la derivabilità parziale o direzionale in un punto **non** implica la continuità.

Differenza con le funzioni di una variabile!

È possibile introdurre una nozione “più forte” di derivabilità, che implichi la continuità come nel caso delle funzioni di una variabile?

Richiamo di algebra lineare: duale di \mathbb{R}^n

Consideriamo l'insieme $\{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ è lineare}\} =: \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- 1 $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale, detto **duale di \mathbb{R}^n** .
- 2 Le proiezioni π_1, \dots, π_n sono linearmente indipendenti in $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e per ogni $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:

$$L = \sum_{i=1}^n L(e_i) \pi_i.$$

Quindi:

le proiezioni costituiscono una **base di $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$** , detta **base duale della base canonica di \mathbb{R}^n** , denotata con $\{dx_1, \dots, dx_n\}$. $\leftarrow ???$

- 3 Ogni $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è univocamente determinato dai valori che assume negli elementi della base canonica di \mathbb{R}^n .

Fine del richiamo

Differenziabilità e differenziale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia \bar{x} un punto interno di A .

Diciamo che f è differenziabile in \bar{x} se esiste $L_{\bar{x}} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - L_{\bar{x}}(h)}{\|h\|} = 0.$$

L'applicazione lineare $L_{\bar{x}}$ si chiama differenziale di f in \bar{x} .

È unica?

Tra poco ...

Esempi

- Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è costante, allora f è differenziabile in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con differenziale uguale all'applicazione costante di valore 0.
- Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, allora f è differenziabile in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con differenziale uguale a f .

Proposizione (differenziale e derivate direzionali)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ un punto interno di A .

Supponiamo che f sia differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ con differenziale $L_{\bar{\mathbf{x}}}$.

Allora: f è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ in qualsiasi direzione \mathbf{v} e

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v}).$$

Dimostrazione ... 

Osservazione

Nelle ipotesi della proposizione, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ vale l'uguaglianza

$$(*) \quad L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Per il richiamo ③:

il differenziale di f in $\bar{\mathbf{x}}$ è univocamente determinato dalle derivate parziali di f in $\bar{\mathbf{x}}$ e pertanto è unico; si denota con il simbolo $df_{\bar{\mathbf{x}}}$ (o $df(\bar{\mathbf{x}})$).

Nota: π_i lineare $\implies d\pi_i \equiv \pi_i, \quad \pi_i(\mathbf{x}) = x_i \quad \xrightarrow{\text{abuso di notazione}} \quad dx_i \equiv \pi_i$ 10

Osservazione

Assumendo che $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia differenziabile in $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$, tenuto conto di (*) e del richiamo ② otteniamo

$$df_{\bar{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) dx_i$$

representazione
del differenziale
nel duale di \mathbb{R}^n

e per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) h_i = \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h}.$$

↑
matrice $1 \times n$ associata a $df_{\bar{\mathbf{x}}}$ rispetto
alle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}

Confronto con funzioni di una variabile ... 

Osservazione (caratterizzazione della differenziabilità) ← utile nella pratica

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$. Allora:

f è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ se e solo se f è derivabile parzialmente in $\bar{\mathbf{x}}$ e

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Esempi

Verificare se le seguenti funzioni sono differenziabili in $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = |x y| \qquad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Osservazioni

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$, con f differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$.

- Per ogni versore \mathbf{v} si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v}) = \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v}$$

↑ ↑

proposizione su differenziale e derivate direzionali rappresentazione del differenziale

formula del gradiente

- Supponendo $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, si ha

- per ogni versore \mathbf{v} : $\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \right| = |\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{v}| \leq \|\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\|,$

- l'uguaglianza vale per $\mathbf{v} = \pm \frac{\nabla f(\bar{\mathbf{x}})}{\|\nabla f(\bar{\mathbf{x}})\|}$.

Dunque:

il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x})$ individua la **direzione di massima pendenza**.

↑ interpretazione geometrica
del gradiente

Osservazione

Per *scrivere* la formula del gradiente è sufficiente che in $\bar{\mathbf{x}}$ la funzione f sia derivabile parzialmente e nella direzione \mathbf{v} .

Tuttavia, se f non è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$, **non è detto** che l'uguaglianza sia valida.

Esempi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

non differenziabile in $(0, 0)$

$$\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) \neq 0 \quad \text{se } \mathbf{v} \notin \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

non differenziabile in $(0, 0)$

$$\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v}$$

Proposizione (differenziabilità e continuità)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e \bar{x} un punto interno di A .

Se f è differenziabile in \bar{x} , allora f è continua in \bar{x} .

Dimostrazione ...

Osservazione

Secondo la proposizione precedente, la continuità in un punto è condizione necessaria per la differenziabilità. Come per le funzioni di una variabile!


Tale condizione non è sufficiente. Esempi ...

Teorema (del differenziale totale) \leftarrow condizione sufficiente per differenziabilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia \bar{x} un punto interno di A . Supponiamo che:

- f sia derivabile parzialmente in un intorno di \bar{x} ,
- le derivate parziali di f siano continue in \bar{x} .

Allora: f è differenziabile in \bar{x} .

Dimostrazione per $n = 2 \dots$ 

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Se f è derivabile parzialmente in A con derivate parziali continue in A , diciamo che f è di classe C^1 in A e scriviamo $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Corollario

Ogni funzione di classe C^1 in un insieme aperto è differenziabile in tale insieme (cioè in ogni punto di tale insieme).

Esempi

- Le funzioni **polinomiali** e le funzioni **razionali** sono differenziabili nei rispettivi domini.
- Studiare la differenziabilità delle funzioni negli esempi di pagina 12.
- Sia f la funzione reale definita in \mathbb{R}^2 ponendo

$$f(x, y) = y^4 + 3x^3y - y^2 \cos(x)$$

e sia $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Stabilire se è lecito utilizzare la formula del gradiente per calcolare la derivata di f in $(0, 1)$ nella direzione \mathbf{v} ; in caso affermativo, calcolarla.

Linearizzazione e piano tangente

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un punto interno di A .

Supponiamo che f sia differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$.

Per definizione:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

che equivale a

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

e si può riscrivere come

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|) \quad \text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Con $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, questo equivale a

$$(*) \quad f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}.$$

Chiamiamo **linearizzazione** di f in $\bar{\mathbf{x}}$ la funzione $\varphi_{\bar{\mathbf{x}}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\varphi_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Nota: $\varphi_{\bar{\mathbf{x}}}$ si ottiene sommando la costante $f(\bar{\mathbf{x}}) - df_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}})$ all'applicazione lineare $df_{\bar{\mathbf{x}}}$, pertanto in genere non è lineare. (È “affine”.)

Rileggiamo (*):

in prossimità di $\bar{\mathbf{x}}$ la linearizzazione $\varphi_{\bar{\mathbf{x}}}$ approssima f a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|$.

Dunque: il grafico di $\varphi_{\bar{\mathbf{x}}}$ approssima “bene” il grafico di f .

Il grafico di $\varphi_{\bar{\mathbf{x}}}$ si chiama **piano tangente** in $\bar{\mathbf{x}}$ al grafico di f ; l'**equazione del piano tangente** è

$$x_{n+1} = f(\bar{\mathbf{x}}) + df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad \left(= f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right).$$

Il piano tangente è davvero un “piano”?

Esempi

- Determinare l'equazione del piano tangente nel punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ al grafico della funzione definita ponendo

$$f(x, y) = \frac{1}{2} + 2x^2 + y^2.$$

- Determinare l'equazione del piano tangente nel punto $(1, -1, 1)$ al grafico della funzione definita ponendo $f(x, y, z) = e^{x+y} z^2 + 1$.

Osservazione

Il piano tangente in \bar{x} al grafico di f contiene le rette tangenti in \bar{x} ai grafici di tutte le “restrizioni direzionali” di f . **Motivazione ...**

Derivate e differenziale di funzioni vettoriali

Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; siano f_1, \dots, f_m , nell'ordine, le componenti di \mathbf{f} . Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$.

La definizione di derivata direzionale di \mathbf{f} in $\bar{\mathbf{x}}$ (e quindi anche quella di derivata parziale di \mathbf{f} in $\bar{\mathbf{x}}$) è formalmente identica alla definizione data per una funzione scalare.

È immediato riconoscere che \mathbf{f} è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v} se e solo se lo sono tutte le sue componenti; inoltre:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \right).$$

Analogamente, \mathbf{f} è derivabile parzialmente in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto alla i -esima variabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti; inoltre:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) \right).$$

Con le notazioni della pagina precedente, supponiamo \mathbf{f} derivabile parzialmente in $\bar{\mathbf{x}}$.

Chiamiamo **matrice jacobiana** (o **jacobiano**) di \mathbf{f} in $\bar{\mathbf{x}}$ la matrice reale con m righe e n colonne la cui riga i -esima contiene gli elementi del gradiente di f_i in $\bar{\mathbf{x}}$. In simboli:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

Esempi

Scrivere la matrice jacobiana delle funzioni

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{f}(x, y) = (x y^2, e^{3x-y^2}, x^2 + y^4)$
- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{f}(x, y, z) = (x y^2 + z^2, 5x^2 + e^{x y z})$.

Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; siano f_1, \dots, f_m , nell'ordine, le componenti di \mathbf{f} . Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$.

Diciamo che \mathbf{f} è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ se tutte le componenti f_1, \dots, f_m sono differenziabili in $\bar{\mathbf{x}}$; chiamiamo differenziale di \mathbf{f} in $\bar{\mathbf{x}}$ la funzione vettoriale $d\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{x}}}$ di componenti $df_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, df_m(\bar{\mathbf{x}})$, nell'ordine.

Evidentemente, $d\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{x}}} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Inoltre, per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) &:= \begin{pmatrix} df_1(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ df_m(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{h} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) h_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) h_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) h_n \end{pmatrix} = J_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{h}, \end{aligned}$$

quindi: la matrice jacobiana $J_{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$ è la matrice $m \times n$ associata a $d\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{x}}}$.

Osservazioni

- Con le ovvie modifiche, alle funzioni vettoriali si estendono le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti per la differenziabilità. Cioè?
- Se \mathbf{f} è differenziabile in $\bar{\mathbf{x}}$ vale l'uguaglianza

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + d\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$$

equivalente a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$$

e si può parlare di linearizzazione di \mathbf{f} in $\bar{\mathbf{x}}$.

Esercizio

Stabilire se la funzione vettoriale $\mathbf{f}(x, y) = (x y^2, e^{3x-y^2}, x^2 + y^4)$ è differenziabile in $(0, 0)$; in caso affermativo, scriverne la linearizzazione.

Regole di calcolo per le derivate parziali (per gradienti, per differenziali)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\mathbf{x} \in \text{int}(A)$.

Supponiamo $\mathbf{f}, \mathbf{g}, u$ derivabili parzialmente rispetto a x_i in \mathbf{x} .

Allora: $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\lambda \mathbf{f}$, $u \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ sono derivabili parzialmente rispetto a x_i in \mathbf{x} e ↑ solo per $m = 3$

- $\frac{\partial(\mathbf{f} + \mathbf{g})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}(\mathbf{x});$
- $\frac{\partial(\lambda \mathbf{f})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lambda \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x});$
- $\frac{\partial(u \mathbf{f})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x});$
- $\frac{\partial(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}(\mathbf{x});$
- $\frac{\partial(\mathbf{f} \times \mathbf{g})}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$

Differenziale e composizione funzionale

Teorema

Siano $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ ($n+m+p \geq 4$). \leftarrow altrimenti il risultato è noto

Siano $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$; supponiamo $\mathbf{f}(A) \subseteq B$.

Sia $\mathbf{x} \in \text{int}(A)$; supponiamo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \text{int}(B)$.

Se \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x} e \mathbf{g} è differenziabile in $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora:

① $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ è differenziabile in \mathbf{x}

② $d(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_{\mathbf{x}} = d\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \circ d\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$

③ $J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$

Esempio

Verificare la validità di ③ per le funzioni

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, \ x y, \ x y^2), \quad \mathbf{g}(u, v, w) = u v^2 w.$$

Caso particolare: $n = p = 1$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x)) \right) \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) f'_j(x)\end{aligned}$$

Esempio

Verificare la validità di ❸ per le funzioni

$$f(x) = (x + 2, x^2 + x), \quad g(u, v) = u^2 - 2v^3.$$

Primo intermezzo: curve in \mathbb{R}^n

Sia (γ, \mathbf{r}) una curva in \mathbb{R}^n , con intervallo dei parametri I .

Diciamo che la curva è **regolare** se

- $\mathbf{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$;
- se la curva è chiusa, $\mathbf{r}'(\min I) = \mathbf{r}'(\max I)$;
- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.

In tal caso, per ogni $t_0 \in I$ possiamo considerare

- la retta parametrizzata da

$$s \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{r}(t_0) + s \mathbf{r}'(t_0)$$

retta tangente in t_0

- il versore $\mathbf{T}(t_0) := \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{\|\mathbf{r}'(t_0)\|}$

versore tangente in t_0

Motivazione ... Interpretazione cinematica ...

Esempi

Verificare se le curve di parametrizzazione

- $t \in [0, 1] \mapsto \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$)
- $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t), \sin(t))$
- $t \in [-1, 1] \mapsto (t^3, t^2)$
- $t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos(t), b \sin(t), ct)$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}^*$) elica
cilindrica

sono regolari; in caso affermativo, determinarne il versore tangente in ogni punto.

Diciamo che la curva è **regolare a tratti** se l'intervallo dei parametri I si può suddividere in un **numero finito di intervalli** I_1, \dots, I_k tali che

- la restrizione di \mathbf{r} a ciascun intervallo è di classe C^1 ,
- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \text{int}(I_1) \cup \dots \cup \text{int}(I_k)$.



l'esistenza del versore tangente non è garantita
negli estremi degli intervalli I_1, \dots, I_k

Diciamo che la curva è **quasi regolare** se è “regolare a tratti in un solo tratto”, cioè se

- $\mathbf{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$,
- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \text{int}(I)$.

Nota: talvolta, invece di “ (γ, \mathbf{r}) è una **curva** regolare (quasi regolare, regolare a tratti)”, diremo “ \mathbf{r} è una **parametrizzazione** regolare (quasi regolare, regolare a tratti) di γ ”.

Esempi

Stabilire se le curve definite dalle seguenti parametrizzazioni sono regolari, quasi regolari, oppure regolari a tratti, e descriverne il sostegno:

- $\mathbf{r}(t) = (|t - 1|, 1 - |t - 1|), \quad t \in [0, 2]$
- $\mathbf{r}(t) = (t(t - 1), t(t - 1)(2t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$ **asteroide**
- $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (2t - t^2, 0) & t \in [0, 1) \\ (1, (t - 1)^2) & t \in [1, 2] \end{cases}$

Esempio (curva grafico)

Dati $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, consideriamo la **curva grafico** associata a f , parametrizzata da $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.

Per ogni $t \in I$ si ha $\mathbf{r}'(t) = (1, f'(t))$, quindi la curva grafico è **regolare**.
 $\neq (0, 0)$

Fissato $t_0 \in I$, la retta tangente alla curva grafico in t_0 ha equazioni parametriche

$$x = t_0 + s, \quad y = f(t_0) + s f'(t_0), \quad s \in \mathbb{R};$$

eliminando il parametro s otteniamo l'equazione cartesiana

$$y = f(t_0) + (x - t_0) f'(t_0).$$

Dunque, com'era prevedibile: la retta tangente alla curva grafico in t_0 coincide con la retta tangente al grafico di f in t_0 .

Nota: se f è di classe C^1 **a tratti**, la curva grafico è regolare **a tratti**.

Attraverso la nozione di curva **regolare (a tratti)** definiamo una classe di sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 .
↑ sta per “regolare o regolare a tratti”

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$. Diciamo che D è un **dominio regolare** se

- D è la chiusura di un insieme aperto, limitato e connesso;
- la **frontiera di D** è **unione disgiunta** di un numero finito di insiemi $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, ciascuno dei quali è **sostegno di una curva semplice, chiusa e regolare (a tratti)**.

Gli insiemi $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ si chiamano **componenti di ∂D** .

Esempi ...

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare. Sia γ una componente di ∂D con parametrizzazione regolare $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. ovvie modifiche se regolare a tratti

Per ogni $t \in I$ definiamo il **versore normale in t** :

$$\mathbf{n}(t) := \left(\frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right). \quad \leftarrow \text{uno dei due versori ortogonali a } \mathbf{T}(t)$$

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- per ogni $t \in I$ il versore normale $\mathbf{n}(t)$ punta verso l'esterno di D ,
- percorrendo γ si lascia D a sinistra.

Vera l'una o l'altra, diciamo che **\mathbf{r} orienta positivamente γ** .

Esempi ...

Se ciascuna componente di ∂D è orientata positivamente, diciamo che **la frontiera di D è orientata positivamente** e la denotiamo con ∂D^+ .

Esempi ...

Secondo intermezzo: superfici in \mathbb{R}^3

Sia (Σ, σ) una superficie in \mathbb{R}^3 con insieme di parametri K .

Diciamo che la superficie è **regolare** se

- la **restrizione di σ all'interno di K** è di classe C^1 ;
- per ogni $(u, v) \in \text{int}(K)$ la matrice jacobiana $J_\sigma(u, v)$ ha rango 2.

↓ ??

In tal caso per ogni $(u_0, v_0) \in \text{int}(K)$ possiamo considerare:

- il piano individuato dai vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$
linearmente indipendenti ↗ **piano tangente in (u_0, v_0)**
- il vettore $\mathbf{N}_\sigma(u_0, v_0) := \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$
↖ non nullo **vettore normale in (u_0, v_0)**
- il versore $\mathbf{n}_\sigma(u_0, v_0) := \frac{\mathbf{N}_\sigma(u_0, v_0)}{\|\mathbf{N}_\sigma(u_0, v_0)\|}$ **versore normale in (u_0, v_0)**

Esempi

Sia $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Verificare che le seguenti superfici sono regolari e determinare i corrispondenti versori normali:

- la **superficie cilindrica**, con parametrizzazione $\sigma : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\sigma(\theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z);$$

- la **superficie sferica**, con parametrizzazione $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\sigma(\varphi, \theta) = (r \sin(\varphi) \cos(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\varphi)).$$

Osservazione

Sia (Σ, σ) una superficie con insieme di parametri K .

Abbiamo convenuto di assumere tacitamente che σ soddisfi la condizione

(*) presi due elementi distinti $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in K$, di cui almeno uno interno a K , si ha $\sigma(u_1, v_1) \neq \sigma(u_2, v_2)$.

In particolare, la restrizione di σ all'interno di K è iniettiva.

Pertanto, posto $\Sigma_0 := \sigma(\text{int}(K))$, per ogni $P \in \Sigma_0$ esiste un unico elemento di $\text{int}(K)$ che σ trasforma in P ; lo denotiamo con $\sigma^{-1}(P)$.

Supponiamo ora che (Σ, σ) sia regolare.

Definiamo il campo vettoriale normale $n : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$n(P) := n_\sigma(\sigma^{-1}(P)) \quad \text{per ogni } P \in \Sigma_0.$$

Se il campo vettoriale normale n è prolungabile con continuità a Σ , diciamo che la superficie è orientabile. \uparrow interpretazione “cinematica” ...

Osservazioni




- Se l'insieme dei parametri è aperto, la superficie è banalmente orientabile.
- Il sostegno di una superficie orientabile ha due “facce”, quella da cui “esce” e quella da cui “entra” il campo vettoriale normale.

Esempi

- La superficie cilindrica e la superficie sferica sono orientabili.
- Il **nastro di Möbius** non è una superficie orientabile.

↑ ???

Diciamo che (Σ, σ) è una superficie **regolare con bordo** se

- l'insieme dei parametri K è un **dominio regolare**;
- σ è iniettiva in K ;  ?? 
- σ è di **classe C^1 in K** e per ogni $(u, v) \in K$ la matrice jacobiana $J_\sigma(u, v)$ ha rango 2.  in **tutto K !**

L'insieme $\sigma(\partial K) =: \partial \Sigma$ si chiama **bordo della superficie**.

 da non confondere con la frontiera di Σ ,
che coincide con Σ

Nota: ogni superficie regolare con bordo è anche una superficie regolare (nel senso della definizione di pagina 35) ed è orientabile.

Osservazione

Se ∂K è unione disgiunta di m sostegni di curve in \mathbb{R}^2 semplici, chiuse e regolari (a tratti), allora il bordo di Σ è unione disgiunta di m sostegni di curve in \mathbb{R}^3 semplici, chiuse e regolari (a tratti).

Osservazioni

Se r_j parametrizza la j -esima componente di ∂K , allora $\sigma \circ r_j$ parametrizza la j -esima componente di $\partial \Sigma$.

Il verso di percorrenza scelto su ciascuna componente della frontiera di K induce un verso di percorrenza sulla corrispondente componente del bordo di Σ .

Esempio: “mezzo cilindro” ...

Se la frontiera di K è orientata positivamente, diciamo che il **bordo della superficie** è **orientato positivamente** e lo denotiamo con $\partial \Sigma^+$.

Osservazione

Percorrendo $\partial \Sigma^+$ si lascia **a sinistra** la faccia della superficie da cui “esce” il versore normale.

Esempio (superficie grafico)

Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un insieme di parametri.

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

\uparrow

- Se K è un insieme **aperto** e $f \in C^1(K, \mathbb{R})$, allora la superficie grafico associata a f è una superficie **regolare orientabile**.
- Se K è un **dominio regolare** e $f \in C^1(K, \mathbb{R})$, allora la superficie grafico associata a f è una superficie **regolare con bordo**.

Per ogni $(u, v) \in K$ si ha

- $\mathbf{N}_\sigma(u, v) = \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), 1 \right)$ nota: il versore normale punta verso l'alto
- $\|\mathbf{N}_\sigma(u, v)\| = \sqrt{\underbrace{\|\nabla f(u, v)\|^2}_{\uparrow \text{ in } \mathbb{R}^2} + 1}$ $\uparrow \text{ in } \mathbb{R}^3$

Nota: il piano tangente alla superficie coincide con il piano tangente al grafico.

Esempi: paraboloide, calotta sferica, semisfera

Sia (Σ, σ) una superficie in \mathbb{R}^3 .

Diciamo che (Σ, σ) è **regolare a pezzi** se esistono $(\Sigma_1, \sigma_1), \dots, (\Sigma_k, \sigma_k)$ superfici **regolari con bordo** tali che

- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$,
- $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \partial \Sigma_i \cap \partial \Sigma_j$ per ogni $i \neq j$. \leftarrow che cosa significa?

$\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ si chiamano **facce** della superficie (Σ, σ) .

Chiamiamo **bordo** della superficie regolare a pezzi l'insieme

$$\partial \Sigma := \overline{\{\mathbf{P} \in \Sigma \mid \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ t.c. } \mathbf{P} \in \partial \Sigma_i\}}.$$

Se $\partial \Sigma = \emptyset$, diciamo che la superficie è **chiusa**.

Esempi: cilindro, sfera, cubo

Attraverso la nozione di superficie regolare a pezzi chiusa definiamo una classe di sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 .

Sia $T \subset \mathbb{R}^3$. Diciamo che T è un **dominio regolare** se

- T è la chiusura di un insieme aperto, limitato e connesso;
- la **frontiera di T** è **unione disgiunta** di un numero finito di insiemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ che sono **sostegni di superfici regolari a pezzi chiuse**.

Gli insiemi $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ si chiamano **componenti di ∂T** .

Esempi ...

Se ciascuna delle componenti di ∂T è parametrizzata in modo che in ogni punto **il versore normale n sia diretto verso l'esterno di T** , diciamo che la frontiera di T è **orientata positivamente** e la denotiamo con ∂T^+ .

Esempi ...

Fine dell'intermezzo

Prime applicazioni del calcolo differenziale

Teorema (del valor medio di Lagrange)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Supponiamo che:

- il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ sia contenuto nell'interno di A ;
- f sia differenziabile nei punti di $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Allora: esiste $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ tale che

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad (= df_{\mathbf{z}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})).$$

Dimostrazione ... 

Si estende a funzioni vettoriali? No!

↓ ??

Corollario (caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo)

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A insieme aperto e connesso.

Supponiamo che f sia derivabile parzialmente in A e che $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in A$. Allora: f è costante in A .

Dimostrazione ... 

Si estende a funzioni vettoriali? Sì!

Derivate parziali successive

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$. Fissiamo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Supponiamo che f sia derivabile parzialmente rispetto a x_i in un intorno U di $\bar{\mathbf{x}}$. Se la funzione

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \mathbf{x} \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

è derivabile parzialmente in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto alla variabile x_j , diciamo che f è derivabile parzialmente due volte in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto a x_i e x_j .

La derivata parziale in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto alla variabile x_j della funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

si chiama derivata parziale seconda di f in $\bar{\mathbf{x}}$ rispetto a x_i e x_j ;

si denota con uno dei simboli $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{\mathbf{x}})$, $D_{ij}f(\bar{\mathbf{x}})$, $f_{x_i x_j}(\bar{\mathbf{x}})$.

Per $j \neq i$ la derivata parziale seconda si dice mista; per $j = i$ si dice pura e il primo simbolo si scrive $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{\mathbf{x}})$.

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$.

Supponiamo che f sia **derivabile parzialmente due volte** in $\bar{\mathbf{x}}$
(cioè derivabile parzialmente rispetto a x_i e x_j , per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$).

La matrice

$$H_f(\bar{\mathbf{x}}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice hessiana di f in $\bar{\mathbf{x}}$** .

Nota: $H_f(\bar{\mathbf{x}}) = J_{\nabla f}(\bar{\mathbf{x}})$

Osservazione

In generale, le derivate parziali seconde miste **dipendono dall'ordine** in cui si esegue la derivazione. Esempio:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ 0 & (x, y) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

Se la funzione è sufficientemente regolare, l'ordine di derivazione non è rilevante:

Teorema (di Schwarz)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$. Siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Se le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ **esistono in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$** e sono **continue in $\bar{\mathbf{x}}$** , allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Diciamo che f è di classe C^2 in A (e scriviamo $f \in C^2(A, \mathbb{R})$) se f è derivabile parzialmente in A con derivate parziali seconde continue in A .

Osservazione

Come corollario del teorema di Schwarz, per ogni funzione di classe C^2 :

- le derivate parziali seconde miste non dipendono dall'ordine in cui si esegue la derivazione;
- la matrice hessiana è simmetrica. $\leftarrow ??$

Esempio

Scrivere la matrice hessiana della funzione definita in \mathbb{R}^3 ponendo

$$f(x, y, z) = x^5 + y^4 z^3 - 3 x z^2.$$

Nota

Data $f \in C^2(A, \mathbb{R})$, la funzione $\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ si chiama laplaciano di f .
traccia della matrice hessiana \nearrow

“Esercizio teorico”

Cioè: pensateci se ne avete voglia ...

- Come si può introdurre la nozione di funzione di classe C^2 in un dominio?
- Come si possono introdurre le nozioni di derivabilità parziale e di derivate parziali di ordine $k \geq 3$?
Cosa vuole dire che una funzione è di classe C^k ?
- Come si generalizza il teorema di Schwarz?
- Come si definisce la derivabilità parziale di ordine $k \geq 2$ per funzioni vettoriali?

Formula di Taylor (di ordine 2)

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$.

Supponiamo che f sia di classe C^2 in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$.

Chiamiamo **polinomio di Taylor di f di centro $\bar{\mathbf{x}}$ e ordine 2** la funzione polinomiale $T_{\bar{\mathbf{x}},2}$ definita in \mathbb{R}^n ponendo

$$T_{\bar{\mathbf{x}},2}(\mathbf{x}) := f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Motivazione?

Proprietà

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}} \frac{f(\mathbf{x}) - T_{\bar{\mathbf{x}},2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2} = 0$
- $f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2)$
↑

formula di Taylor con il resto di Peano

Esempi

Scrivere la formula di Taylor con il resto di Peano di centro $(0,0)$ e ordine 2 delle funzioni

$$\bullet f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cos(y)} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bullet f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ulteriore applicazione del calcolo differenziale: ricerca di estremi

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in A$.

Diciamo che \bar{x} è un **punto di massimo locale per f** se esiste un intorno U di \bar{x} tale che $f(x) \leq f(\bar{x})$ per ogni $x \in U \cap A$.

Diciamo che \bar{x} è un **punto di minimo locale per f** se esiste un intorno U di \bar{x} tale che $f(x) \geq f(\bar{x})$ per ogni $x \in U \cap A$.

Diciamo che \bar{x} è un **punto di estremo locale per f** se è **punto di massimo** o **di minimo locale**.

Il **valore di f** in un punto di estremo locale si chiama **estremo locale di f** .

Esempi

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$

Teorema (di Fermat) \leftarrow analogo al teorema visto in Analisi I

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia \bar{x} un **punto di estremo locale** per f .

Supponiamo che \bar{x} sia **interno ad A** e che f sia **differenziabile** in \bar{x} .

Allora: $df_{\bar{x}} = 0$. \leftarrow zero di $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Dimostrazione ... 

Osservazione

In base al teorema di Fermat i punti interni al dominio di f **candidati** a essere punti di estremo locale di f sono:

- i punti in cui f è differenziabile con differenziale nullo
- i punti in cui f non è differenziabile.

**punti
stazionari**

I punti interni stazionari che **non** sono punti di estremo locale si chiamano **punti di sella**. **Esempio ...**

Nota

\bar{x} è un punto stazionario per f se e solo se f è differenziabile in \bar{x} e

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \quad \left(\Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right)$$

Significato geometrico (per $n = 2$) ...

Esempi

Determinare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$
- $f(x, y, z) = x^3y - y + x^2z^2$

È possibile **classificare** i punti stazionari di una funzione (cioè **stabilire se sono punti di massimo locale, di minimo locale, oppure di sella**) senza ricorrere alla definizione, ossia senza dover risolvere disequazioni in due o più variabili?

Richiamo (dal corso di Geometria)

Sia $H \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice **simmetrica**. Allora:

tutti gli **autovalori** di H sono numeri **reali** ed esiste una **base ortonormale** di \mathbb{R}^n costituita da **autovettori** di H , cioè:

esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tali che

- $H \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ e $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ se $i \neq j$,
- per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica n -upla $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che
 $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$.

Osservazione

↓ hanno senso? ↓

Denotati con λ_m e λ_M , rispettivamente, il **più piccolo** e il **più grande** autovalore di H , si ha

$$\lambda_m \|\mathbf{x}\|^2 \leq H \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq \lambda_M \|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Verifica ...

Con le notazioni dell'osservazione precedente, diciamo che la matrice simmetrica H è

- **definita positiva** se $\lambda_m > 0$,
- **definita negativa** se $\lambda_M < 0$,
- **semidefinita positiva** se $\lambda_m \geq 0$,
- **semidefinita negativa** se $\lambda_M \leq 0$,
- **indefinita** se $\lambda_m < 0 < \lambda_M$.

Fine del richiamo

Classificazione dei punti stazionari

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia \bar{x} un punto interno di A stazionario per f .

Ci proponiamo di stabilire se \bar{x} sia punto di massimo locale, di minimo locale, oppure di sella, analizzando la matrice hessiana di f in \bar{x} .

In quanto segue supporremo che f sia di classe C^2 in un intorno di \bar{x} .

Tale ipotesi:

- implica che $H_f(\bar{x})$ è una matrice simmetrica,
- consente di utilizzare la formula di Taylor di ordine 2 con il resto di Peano.

Lemma

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore **non nullo** di $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un autovettore corrispondente. (Cioè: $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $H_f(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$)

Allora:

- se $\lambda > 0$, la restrizione di f alla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata da \mathbf{v} ha in $\bar{\mathbf{x}}$ un punto di **minimo locale**;
- se $\lambda < 0$, la restrizione di f alla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata da \mathbf{v} ha in $\bar{\mathbf{x}}$ un punto di **massimo locale**.

Dimostrazione ... 

Per $\lambda = 0$ si può prevedere qualcosa? No!

Esempi: $f(x, y) = x^2 + y^4$, $f(x, y) = x^2 - y^4$, $f(x, y) = x^2 + y^3$

Teorema (classificazione dei punti stazionari)

Assumiamo le notazioni e le ipotesi di pagina 57.

- 1 Se $H_f(\bar{x})$ è indefinita, allora \bar{x} è punto di sella per f .
- 2 Se $H_f(\bar{x})$ è definita positiva, allora \bar{x} è punto di minimo locale per f .
- 3 Se $H_f(\bar{x})$ è definita negativa, allora \bar{x} è punto di massimo locale per f .

Dimostrazione ... 

Esempi

Determinare e classificare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$
- $f(x, y) = \ln(1 + x + y) - x - y^2$
- $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2$???
- $f(x, y, z) = x^3y - y + x^2z^2$

Osservazione

↓ cioè?

Se la matrice hessiana è **semidefinita ma non definita**, il teorema sulla classificazione dei punti stazionari **non** è applicabile.

Tenendo conto del lemma di pagina 58, in base al segno degli autovalori non nulli (se ce ne sono) si può **formulare una congettura** sulla natura del punto stazionario, da confermare oppure confutare risolvendo disequazioni oppure individuando restrizioni della funzione per le quali il punto stazionario ha natura diversa da quella congetturata.

Esempi

Classificare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x y^3$

- $f(x, y) = x^4 + x^2 y + y^2 + 3$

- $f(x, y) = 24 x^4 + 3 y^4 - (x - y)^2$

- $f(x, y) = x^4 + x^2 (y^2 - 1)$

↑ luogo di punti stazionari

Esempi

Determinare gli estremi locali e globali delle funzioni

- $f(x, y) = (x + y)^3 |x|$
- $f(x, y) = (x^3 + 2xy^2 - x)^{1/3}$
- $f(x, y) = xy^2 e^{2x+y}$
- $f(x, y) = \frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = (y^2 - 1) \ln(x^2 + y^2)$

Estremi vincolati (per funzioni di due o tre variabili)

Consideriamo alcuni problemi:

- determinare gli estremi globali della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

- determinare la minima distanza tra l'origine e l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 16\};$$

- determinare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, avente volume massimo, se l'area della superficie è 12.

Per risolvere questi problemi bisogna determinare punti di estremo in insiemi **chiusi**, che quindi contengono i punti della propria frontiera; in tali punti, gli strumenti utilizzati in precedenza (teorema di Fermat, classificazione dei punti stazionari) non sono applicabili. **Come si fa?**

Affrontiamo la questione da un punto di vista generale, iniziando con funzioni di due variabili.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Sia $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ e sia $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$.

Supponiamo $Z \neq \emptyset$.

Gli **estremi della restrizione di f all'insieme Z** si chiamano **estremi vincolati di f** ; l'insieme Z si chiama **vincolo (di uguaglianza)**.

Osservazione

Supponiamo che il vincolo Z sia il sostegno di una curva semplice regolare con parametrizzazione \mathbf{r} definita nell'intervallo I .

Allora:

la ricerca degli estremi vincolati di f si riduce alla ricerca degli estremi della funzione $t \in I \mapsto f(\mathbf{r}(t)) \in \mathbb{R}$.

↑ problema di AM I

Esempio

Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

sulla circonferenza unitaria; utilizzare quanto trovato per determinare gli estremi globali di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Come si possono identificare i candidati punti di estremo vincolato in mancanza di una parametrizzazione del vincolo?

Teorema (di Dini, o delle funzioni implicite, in \mathbb{R}^2)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $g \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Siano $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ e $(x_0, y_0) \in Z$.

Supponiamo $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora: \nwarrow derivata parziale di g rispetto a y

- esistono un intorno U di x_0 e un intorno V di y_0 tali che per ogni $x \in U$ esiste uno e un solo elemento y di V per cui risulti $g(x, y) = 0$;
- associando a ciascun x di U l'unico elemento di V previsto al punto precedente si ottiene una funzione $h : U \rightarrow V$, tale che $h(x_0) = y_0$;
- h è di classe C^1 e per ogni $x \in U$:

$$h'(x) = -\frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}. \quad (*)$$

Esempi ...

La funzione h si dice **definita implicitamente** dall'equazione $g(x, y) = 0$.

Osservazione

Nelle ipotesi e con le notazioni del teorema di Dini, l'insieme $Z \cap (U \times V)$ è il **grafico** della funzione h , reale di una variabile reale e di classe C^1 , dunque coincide con il sostegno della curva grafico associata ad h , parametrizzata da $\mathbf{r}(x) = (x, h(x))$, $x \in U$.

curva semplice, non chiusa
e regolare

Valutando $(*)$ in x_0 si ottiene

$$0 = g_x(x_0, h(x_0)) + g_y(x_0, h(x_0)) h'(x_0) = \nabla g(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(x_0),$$

quindi: $\nabla g(x_0, y_0)$ è ortogonale al vettore tangente a Z in (x_0, y_0) .

Nota

Se nel teorema si suppone $g_x(x_0, y_0) \neq 0$, vale un analogo risultato nel quale la funzione definita implicitamente dipende dalla variabile y . Resta valido quanto osservato qui sopra sul gradiente.

Nota

Il teorema di Dini e la successiva osservazione si possono applicare a un generico **insieme di livello** di g , cioè all'insieme

$$E_c := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = c\}, \quad (Z = E_0)$$

con $c \in \mathbb{R}$.

In particolare, in ogni punto dell'insieme di livello **il vettore gradiente** di g , se non nullo, **è ortogonale alla retta tangente all'insieme di livello**.

Esempi ...

Siamo pronti a identificare i candidati punti di estremo vincolato ...

Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^2)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Sia $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ e sia $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$.

Sia $(x_0, y_0) \in Z$ tale che $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto di estremo locale vincolato per f .

Allora: esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che (x_0, y_0, λ_0) è soluzione del sistema

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ \text{moltiplicatore} \\ \text{di Lagrange} \end{array} \quad \begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione ...

Nota: risolvere il sistema equivale a determinare i punti stazionari della funzione **lagrangiana** $L : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Osservazione

In base al teorema dei moltiplicatori di Lagrange, i **candidati** punti di estremo vincolato su Z di f sono:

- i punti del vincolo Z , in cui il ∇g è diverso da $(0, 0)$, che sono stazionari per la funzione lagrangiana;
- i punti del vincolo Z in cui ∇g è uguale a $(0, 0)$. (punti singolari)

Esempi

Determinare i punti singolari dei seguenti vincoli:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^3 = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2(1 + 4x) - y^2 = 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x e^y - y = 0\}$$

Esempi

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per

- determinare gli estremi globali della funzione $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$ sulla circonferenza unitaria; già fatto, ma lo ripetiamo
- determinare la minima distanza tra l'origine e l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y = 16\}.$$

Risoluzione grafica ...

Estremi vincolati per funzioni di tre variabili

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

La definizione di **estremi vincolati** è identica a quella data per funzioni di due variabili, ma consideriamo due diversi tipi di vincoli per f :

① l'insieme degli zeri di una funzione $g \in C^1(A, \mathbb{R})$; $\mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$

② l'insieme degli zeri di una funzione $\mathbf{g} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$. $\mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$

per funzioni di due variabili: $\mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$

Esempi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x y - 1 = 0\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0, 2x + 4y - z = 0\}$$

Osservazione

Come per le funzioni di due variabili, se il vincolo è sostegno di una curva semplice regolare con parametrizzazione \mathbf{r} definita in un intervallo I , la ricerca degli estremi vincolati di f si riduce alla ricerca degli estremi della funzione di una variabile $t \in I \mapsto f(\mathbf{r}(t)) \in \mathbb{R}$.

Se invece il vincolo è sostegno di una superficie regolare con parametrizzazione σ definita in un insieme di parametri K , la ricerca degli estremi vincolati di f si riduce alla ricerca degli estremi della funzione di due variabili $(u, v) \in K \mapsto f(\sigma(u, v)) \in \mathbb{R}$.

Esempio

Determinare gli estremi globali della funzione $f(x, y, z) = x y z$ sulla porzione della superficie sferica unitaria contenuta nel primo ottante.

Come si possono identificare i candidati punti di estremo vincolato in mancanza di una parametrizzazione del vincolo?

Esaminiamo separatamente i due tipi di vincolo ...

Vincolo di tipo ① “bidimensionale”

Teorema di Dini

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme aperto, $g \in C^1(A, \mathbb{R})$, Z l'insieme degli zeri di g .

Sia $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in Z$ tale che $\nabla g(P_0) \neq (0, 0, 0)$.

Allora: esiste un intorno W di P_0 tale che l'insieme $Z \cap W$ sia il grafico di una funzione reale di due variabili reali di classe C^1 , e quindi il sostegno di una superficie regolare.

Per esempio:

se $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora $Z \cap W$ è il grafico di una funzione $h = h(x, y)$, definita e di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0) , con $h(x_0, y_0) = z_0$ e

$$h_x(x, y) = -\frac{g_x(x, y, h(x, y))}{g_z(x, y, h(x, y))} \quad h_y(x, y) = -\frac{g_y(x, y, h(x, y))}{g_z(x, y, h(x, y))}.$$

Nota

$\nabla g(P_0)$ è ortogonale al piano tangente al sostegno della superficie in P_0 .

Verifica ...

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Sia $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ e sia $Z := \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0\}$.

Sia $(x_0, y_0, z_0) \in Z$ tale che $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.

Supponiamo che (x_0, y_0, z_0) sia un **punto di estremo locale vincolato** per f .

Allora:

esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana $L : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$L(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z).$$

Dimostrazione ...

Esempi

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per

- determinare gli estremi globali della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sul vincolo di equazione $z^2 - x y - 1 = 0$;
- determinare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo, senza coperchio, avente volume massimo, se l'area della superficie è 12.

Vincolo di tipo ② “unidimensionale”

Teorema di Dini

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme aperto, $\mathbf{g} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$, Z l'insieme degli zeri di \mathbf{g} .
Sia $P_0 := (x_0, y_0, z_0) \in Z$ tale che la matrice jacobiana di \mathbf{g} in P_0 ha rango 2.

Allora: esiste un intorno W di P_0 tale che $Z \cap W$ è il sostegno di una curva regolare.

Motivazione ...

Nota

Denotate con g_1 e g_2 le componenti di \mathbf{g} , il piano individuato dai vettori $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$ è ortogonale alla retta tangente alla curva in P_0 .

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme aperto e sia $f \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Sia $\mathbf{g} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ e sia $Z := \{(x, y, z) \in A \mid \mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0)\}$.

Sia $(x_0, y_0, z_0) \in Z$ tale che la matrice jacobiana di \mathbf{g} in (x_0, y_0, z_0) ha rango 2.

Supponiamo che (x_0, y_0, z_0) sia un punto di estremo locale vincolato per f .

Allora:

esistono $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ tale che $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ è punto stazionario della funzione lagrangiana $L : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) := f(x, y, z) - \lambda g_1(x, y, z) - \mu g_2(x, y, z),$$

dove g_1 e g_2 sono le componenti di \mathbf{g} .

Motivazione ...

Esempio

Utilizzare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per determinare gli estremi globali della funzione

$$f(x, y, z) = x + 3y - z$$

sul vincolo definito dalle equazioni

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad 2x + 4y - z = 0.$$

Utilizzare una parametrizzazione del vincolo per verificare il risultato ottenuto.

APPENDICE

Dimostrazione della proposizione su differenziale e derivate direzionali

Sia $\bar{\mathbf{x}}$ un punto interno di A . Sia $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{\mathbf{x}}) \subset A$.

Per $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ definisco il rapporto incrementale

$$R(\mathbf{h}) := \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{h}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Per ipotesi: $\exists \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0$.

Fisso una direzione \mathbf{v} e definisco $V := \{t \mathbf{v} \mid t \in (-r, r)\}$ ($\subset B_r(\mathbf{0})$).


Ovviamente la restrizione di R a V tende a 0 per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

In simboli: $\exists \lim_{t \rightarrow 0} R(t \mathbf{v}) = 0$. Esplicitando:

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - L_{\bar{\mathbf{x}}}(t \mathbf{v})}{\|t \mathbf{v}\|} = 0$$

che equivale a

$$(*) \quad \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - t L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v})}{|t|} = 0.$$

 linearità di $L_{\bar{\mathbf{x}}}$

Osservo che

$$\frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - t L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v})}{|t|} = \text{sign}(t) \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - t L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v})}{t}.$$

Pertanto (*) equivale a

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) - t L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v})}{t} = 0$$

che equivale a

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} - L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v}) = 0$$

che equivale a

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} = L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v}).$$

A norma di definizione, ciò equivale a dire che f è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v} con derivata direzionale uguale a $L_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v})$. □

Differenziale delle funzioni di una variabile

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in A$.

f è **derivabile** in \bar{x} $\stackrel{\text{DEF}}{\iff}$ esiste finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \iff$

esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = c \quad (=: f'(\bar{x})) \iff$

esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - c h}{|h|} = 0 \quad (\bullet)$

Ricordiamo che le funzioni del tipo “moltiplicazione per costante” sono tutte e sole le applicazioni lineari di \mathbb{R} in \mathbb{R} . Dunque: (\bullet) equivale a

f è **differenziabile** in \bar{x} e $df_{\bar{x}}(h) = f'(\bar{x}) h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione del teorema del differenziale totale

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ denoto con $I_{a,b}$ l'intervallo chiuso di estremi a e b .

Per ipotesi:

esiste $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{x}, \bar{y}) \subset A$, le derivate parziali f_x e f_y sono definite (almeno) in $B_r(\bar{x}, \bar{y})$ e sono continue in (\bar{x}, \bar{y}) .

Fisso $(h, k) \in B_r(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$; osservo che $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) \in B_r(\bar{x}, \bar{y})$.

Definisco il rapporto incrementale:

$$R(h, k) := \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - f_x(\bar{x}, \bar{y}) h - f_y(\bar{x}, \bar{y}) k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Definisco $\varphi : I_{\bar{x}, \bar{x}+h} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(t) = f(t, \bar{y} + k);$$

osservo che φ è derivabile in $I_{\bar{x}, \bar{x}+h}$ con $\varphi'(t) = f_x(t, \bar{y} + k)$.

Per il teorema del valor medio, esiste $\xi_h \in I_{\bar{x}, \bar{x}+h}$ tale che

$$\varphi(\bar{x} + h) - \varphi(\bar{x}) = \varphi'(\xi_h) h$$

cioè

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y} + k) = f_x(\xi_h, \bar{y} + k) h. \quad (1)$$

Definisco $\psi : I_{\bar{y}, \bar{y}+k} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(t) = f(\bar{x}, t);$$

osservo che ψ è derivabile in $I_{\bar{y}, \bar{y}+k}$ con $\psi'(t) = f_y(\bar{x}, t)$.

Per il teorema del valor medio, esiste $\eta_k \in I_{\bar{y}, \bar{y}+k}$ tale che

$$\psi(\bar{y} + k) - \psi(\bar{y}) = \psi'(\eta_k) k$$

cioè

$$f(\bar{x}, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f_y(\bar{x}, \eta_k) k. \quad (2)$$

Sommando termine a termine (1) e (2) ottengo

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = f_x(\xi_h, \bar{y} + k) h + f_y(\bar{x}, \eta_k) k.$$

Posso riscrivere il rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} R(h, k) &= \frac{f_x(\xi_h, \bar{y} + k) h + f_y(\bar{x}, \eta_k) k - f_x(\bar{x}, \bar{y}) h - f_y(\bar{x}, \bar{y}) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{(f_x(\xi_h, \bar{y} + k) - f_x(\bar{x}, \bar{y})) h + (f_y(\bar{x}, \eta_k) - f_y(\bar{x}, \bar{y})) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} 0 \leq |R(h, k)| &\leq \left| \frac{(f_x(\xi_h, \bar{y} + k) - f_x(\bar{x}, \bar{y})) h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{(f_y(\bar{x}, \eta_k) - f_y(\bar{x}, \bar{y})) k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |f_x(\xi_h, \bar{y} + k) - f_x(\bar{x}, \bar{y})| + |f_y(\bar{x}, \eta_k) - f_y(\bar{x}, \bar{y})|. \end{aligned}$$

Ricapitolando:

per ogni $(h, k) \in B_r(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$ esistono $\xi_h \in I_{\bar{x}, \bar{x}+h}$ e $\eta_k \in I_{\bar{y}, \bar{y}+k}$ tali che

$$0 \leq |R(h, k)| \leq |f_x(\xi_h, \bar{y} + k) - f_x(\bar{x}, \bar{y})| + |f_y(\bar{x}, \eta_k) - f_y(\bar{x}, \bar{y})|. \quad (3)$$

Per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$:

- $\bar{x} + h$ tende a \bar{x} ; essendo compreso tra \bar{x} e $\bar{x} + h$, anche ξ_h tende a \bar{x} ;
- $\bar{y} + k$ tende a \bar{y} .

$\downarrow f_x$ continua in (\bar{x}, \bar{y})

Dunque $(\xi_h, \bar{y} + k)$ tende a (\bar{x}, \bar{y}) e quindi $f_x(\xi_h, \bar{y} + k)$ tende a $f_x(\bar{x}, \bar{y})$.

Pertanto: il primo addendo in (3) tende a 0.

Analogamente si deduce che anche il secondo addendo in (3) tende a 0.

Per il teorema di convergenza obbligata:

$$R(h, k) \rightarrow 0 \quad \text{per } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$



Derivata direzionale di una funzione vettoriale



Definizione per una funzione scalare

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Diciamo che f è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v} se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t} =: \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \begin{array}{l} \text{derivata di } f \text{ in } \bar{\mathbf{x}} \\ \text{nella direzione } \mathbf{v} \end{array}$$

Definizione per una funzione vettoriale

Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Diciamo che \mathbf{f} è derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v} se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})}{t} =: \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \begin{array}{l} \text{derivata di } \mathbf{f} \text{ in } \bar{\mathbf{x}} \\ \text{nella direzione } \mathbf{v} \end{array}$$

\uparrow \uparrow
funzione vettoriale $\in \mathbb{R}^m$

Funzioni di classe C^1 in un dominio

↑ chiusura di un insieme aperto

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.

Diciamo che f è una funzione di classe C^1 in $\overline{\Omega}$ se esistono

- un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\Omega} \subset A$,
- una funzione $g \in C^1(A, \mathbb{R})$ tale che $g|_{\overline{\Omega}} = f$.

In tal caso, per ogni $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ poniamo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) := \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$.

Osservazione

I valori delle derivate parziali di f nei punti di $\partial\Omega$ non dipendono dal prolungamento g considerato. ◀

Dimostrazione del teorema del valor medio di Lagrange

Considero la parametrizzazione standard del segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$:

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tale che } \mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

Osservo che \mathbf{r} è di classe C^1 e $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Per ipotesi il segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ è contenuto nell'interno di A , quindi in A ; pertanto posso definire la funzione composta $g := f \circ \mathbf{r}$.

Esplicitando: definisco $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \text{ per ogni } t \in [0, 1].$$

g è composta di funzioni differenziabili, pertanto è differenziabile (che equivale a derivabile) e per ogni $t \in [0, 1]$:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{r}(t)) r'_j(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Applicando a g il teorema del valor medio per funzioni di una variabile, deduco che esiste $t_0 \in (0, 1)$ tale che


$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0),$$

che equivale a

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Posto $\mathbf{z} := \mathbf{r}(t_0)$, la precedente uguaglianza diventa

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Per concludere basta osservare che ovviamente \mathbf{z} appartiene al segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ e che è diverso da \mathbf{x} e \mathbf{y} perché t_0 è diverso da 0 e 1. 

Dimostrazione della caratterizzazione delle funzioni a gradiente nullo

Osservo anzitutto che per ipotesi f è derivabile parzialmente in A e le sue derivate parziali sono identicamente nulle, e quindi continue, in A .

Per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile in A .

Fisso $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Per ipotesi, A è connesso (per poligonalità), quindi esiste una poligonale di estremi \mathbf{x} e \mathbf{y} contenuta in A ; denoto con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ (nell'ordine) i vertici di tale poligonale.

Il segmento $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ è contenuto in A ($= \text{int}(A)$) e, per quanto osservato prima, f è differenziabile nei punti di $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$.

Per il teorema del valor medio, esiste $\mathbf{z}_1 \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \setminus \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ tale che

$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(\mathbf{z}_1) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).$$

Ovviamente $\mathbf{z}_1 \in A$ e quindi, per ipotesi, $\nabla f(\mathbf{z}_1) = \mathbf{0}$.

Dall'uguaglianza segue $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = 0$, cioè $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$.


Ripetendo il medesimo ragionamento sul segmento $[x_2, x_3]$, ottengo $f(x_2) = f(x_3)$ e, per transitività, $f(x_1) = f(x_3)$.

Iterando su tutti i segmenti che compongono la poligonale, ottengo

$$f(x_1) = f(x_k);$$

ricordando che gli estremi della poligonale sono proprio x e y , ottengo

$$f(x) = f(y).$$

Data l'arbitrarietà di x e y , l'uguaglianza precedente mostra che la funzione f è costante. 

Dimostrazione del teorema di Fermat

Sia $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}(A)$ di **massimo locale** per f . dimostrazione analoga per punti di minimo locale

Sia $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{\mathbf{x}}) \subset A$ e

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in B_r(\bar{\mathbf{x}}). \quad (1)$$

Fisso $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pongo $\mathbf{v} := \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ e definisco $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g(t) = f(\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v}).$$

ben posta perché
 $\bar{\mathbf{x}} + t \mathbf{v} \in B_r(\bar{\mathbf{x}})$
per ogni $t \in (-r, r)$

Osservo che:

- $g(t) \leq g(0)$ per ogni $t \in (-r, r)$ per (1)
- f differenziabile in $\bar{\mathbf{x}} \implies f$ derivabile in $\bar{\mathbf{x}}$ nella direzione \mathbf{v}
 $\iff g$ derivabile in $t = 0$


Applicando il teorema di Fermat per funzioni reali di una variabile reale ottengo $g'(0) = 0$.

Siccome

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{v}) = df_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}),$$

ottengo $df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{h}) = 0$.

Noto che \mathbf{h} è un arbitrario elemento di $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$; inoltre, $df_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{0}) = 0$.

Dunque: $df_{\bar{\mathbf{x}}}$ è lo zero di $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. 

Dimostrazione del lemma

Sia $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{\mathbf{x}}) \subset A$ e f è di classe C^2 in $B_r(\bar{\mathbf{x}})$.

Per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\bar{\mathbf{x}})$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2),$$

$\uparrow = \mathbf{0}$ perché $\bar{\mathbf{x}}$ è stazionario

quindi

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2).$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore non nullo di $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ e sia $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ un autovettore corrispondente.

Esprimo la restrizione di f alla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata da \mathbf{v} come $t \mapsto f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v})$, definita in un intorno di 0. \leftarrow in modo che $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v} \in B_r(\bar{\mathbf{x}})$

Per ogni t appartenente a tale intorno:

$$f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (t\mathbf{v}) \cdot (t\mathbf{v}) + o(\|t\mathbf{v}\|^2)$$

che equivale a

$$f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{t^2}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + o(t^2 \|\mathbf{v}\|^2) \neq 0$$

cioè

$$f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{t^2}{2} \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + o(t^2)$$

cioè, se $t \neq 0$:

$$f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = t^2 \left(\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} \right). \quad (*)$$

Per $t \rightarrow 0$, la quantità tra parentesi tende a $\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{v}\|^2$, diverso da 0.

Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I di $t = 0$ tale che


$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : \begin{cases} \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} > 0 & \text{se } \lambda > 0 \\ \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2} < 0 & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Da (*) segue allora

$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : \begin{cases} f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) > 0 & \text{se } \lambda > 0 \\ f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) - f(\bar{\mathbf{x}}) < 0 & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\text{per ogni } t \in I \setminus \{0\} : \begin{cases} f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) > f(\bar{\mathbf{x}}) & \text{se } \lambda > 0 \\ f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{v}) < f(\bar{\mathbf{x}}) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

e questo prova che $\bar{\mathbf{x}}$ è punto di minimo per la restrizione di f se $\lambda > 0$,
mentre è punto di massimo per la restrizione di f se $\lambda < 0$. 

Dimostrazione del teorema sulla classificazione dei punti stazionari

❶ Suppongo che $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ sia indefinita, cioè $\lambda_m < 0 < \lambda_M$.

Denoto con \mathbf{v} e \mathbf{w} due autovettori corrispondenti rispettivamente a λ_m e λ_M . Per il lemma:

- $\lambda_m < 0 \implies \bar{\mathbf{x}}$ è punto di massimo per la restrizione di f alla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata da \mathbf{v} ,
- $\lambda_M > 0 \implies \bar{\mathbf{x}}$ è punto di minimo per la restrizione di f alla retta passante per $\bar{\mathbf{x}}$ individuata da \mathbf{w} .

Deduco immediatamente che $\bar{\mathbf{x}}$ non può essere né punto di minimo, né punto di massimo per f , quindi è un punto di sella.

❷ Suppongo che $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ sia definita positiva, cioè $\lambda_m > 0$.

Come nella dimostrazione del lemma, fisso $r \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $B_r(\bar{\mathbf{x}}) \subset A$ e f è di classe C^2 in $B_r(\bar{\mathbf{x}})$; per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\bar{\mathbf{x}})$ ho

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2).$$

Per l'osservazione sulle matrici simmetriche:

$$H_f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geq \lambda_m \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2$$

pertanto per ogni $\mathbf{x} \in B_r(\bar{\mathbf{x}})$:

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \geq \frac{\lambda_m}{2} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 + o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2)$$

e per $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$:

$$f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) \geq \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \left(\frac{\lambda_m}{2} + \frac{o(\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2)}{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2} \right).$$

Per $\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ la quantità tra parentesi tende a $\frac{\lambda_m}{2}$, positivo per ipotesi.

Per il teorema della permanenza del segno, esiste U intorno di $\bar{\mathbf{x}}$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in U \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$: $f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, cioè $f(\mathbf{x}) > f(\bar{\mathbf{x}})$.

A norma di definizione, $\bar{\mathbf{x}}$ è un punto di minimo locale per f .

La dimostrazione di ③ segue in modo analogo, usando la disuguaglianza

$$H_f(\bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leq \lambda_M \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2$$

e il fatto che λ_M è negativo per ipotesi.



Teorema di Dini nel caso $g_x(x_0, y_0) \neq 0$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e $g \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Siano $Z := \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ e $(x_0, y_0) \in Z$.

Supponiamo $g_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora:  derivata parziale di g rispetto a x

- esistono un intorno U di x_0 e un intorno V di y_0 tali che per ogni $y \in V$ esiste uno e un solo elemento x di U per cui risulti $g(x, y) = 0$;
- associando a ciascun y di V l'unico elemento di U previsto al punto precedente si ottiene una funzione $h: V \rightarrow U$, tale che $h(y_0) = x_0$;
- h è di classe C^1 e per ogni $y \in U$:

$$h'(y) = -\frac{g_y(h(y), y)}{g_x(h(y), y)}.$$