

**Programma di Algebra 2**  
**Laurea Triennale in Matematica**  
**Programma del Corso**  
**A.A. 2016-2017**

Docente: Prof. Roberto La Scala  
I semestre

**Elementi di teoria dei gruppi**

Definizione di gruppo, esempi fondamentali, sottogruppi, classi laterali, relazioni di equivalenza definite da un sottogruppo, teorema di Lagrange, indice di un sottogruppo, teorema di moltiplicazione degli indici, i periodi sono divisori dell'ordine, gruppi di ordine  $p$ , teorema di Eulero, sottogruppi normali, esempi, un sottogruppo normale è unione di classi di coniugio, sottogruppi di indice 2, sottogruppo di ordine  $n$  del gruppo diedrale  $D_n$ , il sottogruppo alterno  $A_n \subset S_n$ , gruppi semplici:  $A_5$ , sottogruppi normali e congruenze, gruppo quoziente, esempi, sottogruppi prodotto e intersezione, sottogruppo generato da un insieme, sottogruppo prodotto come sottogruppo generato da un unione, caso abeliano: sottogruppo somma, omomorfismi di gruppi, esempi, nucleo e immagine, congruenza definita da un omomorfismo, teorema fondamentale d'isomorfismo, esempi e applicazioni, gruppo degli automorfismi, sottogruppo degli automorfismi interni, il centro di un gruppo è normale, quoziente di un gruppo sul suo centro, centro del gruppo diedrale, primo teorema d'isomorfismo, reticolo dei sottogruppi, esempi, teorema di corrispondenza, secondo teorema di isomorfismo, esempi e applicazioni, sottogruppi di un gruppo ciclico, omomorfismi definiti su gruppi ciclici, gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico, prodotto diretto esterno di gruppi, periodo di un elemento di un prodotto diretto, teorema cinese del resto per i gruppi, prodotto diretto interno di sottogruppi, isomorfismo col prodotto diretto esterno, caratterizzazioni alternative di un prodotto diretto interno, caso abeliano: somma diretta, prodotto semidiretto interno, esempi: gruppo diedrale e gruppo di Borel, quoziente di un prodotto semidiretto col fattore normale, cardinalità di un prodotto di sottogruppi, gruppi e simmetria: esempi geometrici, rappresentazione e azione di un gruppo su un insieme, azione regolare sinistra, teorema di Cayley, azione sui laterali, azione per coniugazione, sottinsiemi stabili, orbite, esempi e applicazioni, azioni transitive, classi di coniugio, un sottinsieme stabile è unione di orbite, sottogruppo stabilizzatore (gruppo di simmetria) di un insieme, coniugato di un sottogruppo stabilizzatore, elementi fissati, stabilizzatore di un elemento, centralizzante di un elemento e centro di un gruppo, sottogruppo normalizzante, mappe equivarianti, l'insieme dei laterali sinistri definiti dallo stabilizzatore di un elemento e l'orbita dell'elemento sono insiemi biiettivi e equivarianti, esempi e applicazioni, equazione delle classi, permutazioni coniugate, partizioni, diagrammi di Young e struttura ciclica di una partizione, classi di coniugio di  $S_n$ , classi di coniugio, centralizzanti e sottogruppi normali di  $S_4$ , teorema di Cauchy,  $p$ -gruppi, centro di un  $p$ -gruppo, gruppi di ordine  $p^2$ , catene di sottogruppi di indice  $p$  in

un  $p$ -gruppo, se  $p$  non divide  $m$  allora  $p$  non divide il binomiale  $p^n m$  su  $p^n$ , primo teorema di Sylow, secondo teorema di Sylow (enunciato), esempi e applicazioni, un  $p$ -Sylow di  $GL(\mathbb{Z}_p)$ , un  $p$ -Sylow è normale se e solo se è l'unico, prodotti diretti di  $p$ -Sylow, gruppi finiti nilpotenti, i gruppi abeliani (finiti) e i  $p$ -gruppi sono nilpotenti, teorema di Lagrange "inverso",  $\mathbb{S}_3, \mathbb{A}_4$  non sono nilpotenti, i  $p$ -gruppi abeliani sono prodotto diretto di gruppi ciclici e le loro classi d'isomorfismo sono associate a partizioni (enunciato), i gruppi abeliani finiti sono prodotto diretto di gruppi ciclici, esempi e applicazioni, classificazione dei gruppi abeliani finiti, gruppi di ordine  $p^2$  e  $2p$ , i gruppi di ordine 15 sono ciclici, gruppo dei quaternioni, gruppi di ordine 8, gruppi di ordine 12 (enunciato), classificazione dei gruppi di ordine  $\leq 15$ .

### Elementi di teoria degli anelli

Definizione di anello, esempi fondamentali, omomorfismi di anelli, nucleo e immagine, sottoanelli e ideali, esempi e applicazioni, elementi unitari, ideale generato da un insieme e forma dei suoi elementi, ideali principali, ideali somma e intersezione, ideali e congruenze, esempi e applicazioni, teorema fondamentale d'isomorfismo, primo teorema di isomorfismo, teorema di corrispondenza, secondo teorema d'isomorfismo, esempi e applicazioni, domini, corpi, caratterizzazione dei corpi in termini di ideali, divisori dello zero e elementi unitari in anelli commutativi finiti, un dominio commutativo finito è un campo, centro di un anello, ideali primi e massimali e loro caratterizzazione in termini di anelli quoziente, esempi e applicazioni, teorema di corrispondenza per ideali primi e massimali, campo delle frazioni di un dominio, domini euclidei, esempi fondamentali, interi di Gauss, domini ad ideali principali, esempi e controesempi, i domini euclidei sono PID, massimo comun divisore nei PID, elementi unitari in un dominio euclideo, esempi, elementi primi ed ideali principali primi, elementi irriducibili, il generatore di un ideale principale massimale è un elemento irriducibile, equivalenza fra elementi irriducibili e ideali principali massimali nei PID, gli elementi primi sono irriducibili, equivalenza fra elementi primi e irriducibili, ideali principali primi e massimali nei PID, domini a fattorizzazione unica, equivalenza fra elementi primi e irriducibili in un UFD, massimo comun divisore negli UFD, i domini euclidei sono UFD, i PID sono UFD (enunciato), esempi e controesempi, lemma e teorema di Gauss per gli UFD (enunciato), l'anello dei polinomi di un UFD è un UFD, esempi e applicazioni.

### Elementi di teoria dei campi

Caratteristica di un campo, sottocampi fondamentali, teorema binomiale in caratteristica  $p$ , endomorfismo di Frobenius, omomorfismi di anelli unitari fra campi, estensioni, grado di una estensione, esempi fondamentali, regola di moltiplicazione dei gradi e sue applicazioni, sottoanello e sottocampo generato da un insieme, i domini di dimensione finita su un campo sono campi, sottoanello generato e sottocampo generato coincidono in dimensione finita, estensioni semplici, elementi algebrici e trascendenti, polinomio minimo di un elemento algebrico, base di una estensione algebrica semplice, aritmetica in una estensione alge-

brica semplice, esempi e applicazioni, aritmetica di  $\mathbb{C}$  come estensione algebrica semplice, numeri algebrici e trascendenti, estensione algebriche e trascendenti, una estensione è finita se e solo se è algebrica e finitamente generata, esempi e applicazioni, i sottoanelli di estensioni algebriche sono sottocampi, transitività delle estensioni algebriche, chiusura algebrica di un campo, chiusura algebrica dei razionali, campi di spezzamento, esistenza e maggiorazione sul grado di un campo di spezzamento, esempi, polinomi ciclotomici, spezzamento di polinomi del tipo  $x^n - a$ ,  $F$ -omomorfismi di estensioni,  $F$ -omomorfismi definiti su una estensione semplice, esistenza di  $F$ -omomorfismi fra campi di spezzamento, gruppo di Galois (definizione), campi algebricamente chiusi, teorema fondamentale dell'algebra (enunciato), teorema dell'elemento primitivo in caratteristica zero (enunciato), esempi e applicazioni, radici multiple e derivata di un polinomio, cardinalità di un campo finito, un campo finito è di spezzamento per il polinomio  $x^{p^n} - x$ , campi finiti con la stessa cardinalità sono isomorfi, elementi fissati da un endomorfismo di campi, esistenza dei campi finiti, una condizione per la ciclicità di un gruppo abeliano finito, il gruppo degli elementi unitari di un campo finito è ciclico, teorema dell'elemento primitivo per un campo finito, radici primitive di un campo finito.

**Testi consigliati:**

- [1] Piacentini-Cattaneo, Algebra, Zanichelli
- [2] Herstein, Algebra, Editori Riuniti
- [3] Milne, Group Theory, [www.jmilne.org/math](http://www.jmilne.org/math)
- [4] Milne, Fields and Galois Theory, [www.jmilne.org/math](http://www.jmilne.org/math)