UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

CONSIGLIO INTERCLASSE IN MATEMATICA

CORSO DI STUDIO	**LAUREA IN MATEMATICA (L-35)**
ANNO ACCADEMICO	**2023-2024**
INSEGNAMENTO	**GEOMETRIA 4**

Principali informazioni sull'insegnamento	
Anno di corso	Secondo
Periodo di erogazione	Secondo semestre (26 febbraio 2024 – 31 maggio 2024)
Crediti formativi universitari (CFU)	8
Settore scientifico disciplinare (SSD)	MAT/03 – Geometria
Lingua di erogazione	Italiano
Modalità di frequenza	Facoltativa

Docenti		
Nome e cognome	Maria Falcitelli (titolare)	Sara Azzali
Indirizzo mail	maria.falcitelli@uniba.it	sara.azzali@uniba.it
Telefono	+39 080 544 2844	+39 080 544 2275
Sede	Dipartimento di Matematica stanza 9 terzo piano	Dipartimento di Matematica stanza 22 secondo piano
Sede virtuale		
Pagina web	https://www.dm.uniba.it/it/members/falcitelli	https://www.dm.uniba.it/it/members/azzali
Ricevimento	Da concordare per e-mail	Da concordare per e-mail

Organizzazione della didattica				
	Totali	Didattica frontale	Pratica (esercitazioni)	Studio individuale
Ore	200	48	30	122
CFU	8	6	2	

Obiettivi formativi	
	Acquisizione degli elementi basilari della topologia con particolare riferimento alla costruzione di esempi e allo studio delle proprietà degli spazi che sono invarianti per omeomorfismi.

Prerequisiti	
	Conoscenze matematiche acquisite nel primo anno e nel primo semestre del secondo. In particolare: teoria elementare degli insiemi, relazioni di equivalenza, funzioni continue tra sottoinsiemi di R, elementi basilari di geometria affine e proiettiva.

Syllabus	
Contenuti dell'insegnamento (Programma)	Spazi topologici. Definizione di topologia su un insieme. Esempi: la topologia discreta, la topologia banale. Definizioni di spazio topologico e di base e relative proprietà. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnata base. Confronto tra topologie: il concetto di topologia meno fine di un'altra. Esempi. Intorni di un punto: definizione, esempi e proprietà. Sistema fondamentale di intorni di un punto: definizione e proprietà. Teorema di esistenza ed unicità della topologia di assegnato sistema fondamentale di intorni di ciascun punto. Il primo e il secondo assioma di

	numerabilità: definizione e legame tra i due concetti. Ulteriori esempi: topologia cofinita e conumerabile, topologia generata dagli intervalli aperti a destra e chiusi a sinistra, accenni alle principali topologie su spazi di funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato. Spazi metrici. Definizione di spazio metrico. Esempi. Sfere aperte in uno spazio metrico: definizione, esempi e proprietà. Esistenza ed unicità della topologia indotta da un'assegnata distanza. Caratterizzazione degli intorni di un punto di uno spazio metrico. Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità. Distanze equivalenti. La distanza di un punto da un sottoinsieme: esempi e proprietà. Sottoinsiemi di uno spazio topologico. Interno, esterno e frontiera di un sottoinsieme di uno spazio topologico. Caratterizzazione degli insiemi aperti. Proprietà della frontiera di un insieme. Insiemi chiusi: definizione, caratterizzazione, esempi e proprietà. La chiusura di un insieme. Legame tra la chiusura, la frontiera e l'esterno di un insieme. Una caratterizzazione degli insiemi chiusi. Insiemi densi: definizione e caratterizzazione. Spazi topologici separabili. Ogni spazio che verifica il secondo assioma di numerabilità è separabile. Uno spazio metrizzabile e separabile verifica il secondo assioma di numerabilità. Applicazioni continue, omeomorfismi. Applicazioni continue in un punto: definizione e caratterizzazione. Applicazioni continue tra spazi topologici: definizione, caratterizzazioni, esempi e proprietà. Le topologie immagine inversa, immagine diretta di una topologia mediante un'applicazione. Esempi. Applicazioni aperte: definizione e caratterizzazione. Omeomorfismi: definizione, caratterizzazioni e proprietà. Il gruppo degli omeomorfismi di uno spazio topologico. Proprietà topologiche. Esempi di omeomorfismi; la proiezione stereografica. Sottospazi. La topologia indotta su un sottoinsieme di uno spazio topologico: definizione e proprietà. Esempio: la topologia indotta dalla topologia naturale di R su Z. Definizione di sottospazio. Caratterizzazione dei chiusi di un sottospazio. La chiusura di un sottoinsieme di un sottospazio. Sottospazi di uno spazio metrico, in particolare dello spazio Euclideo R^n. Sottospazi ed applicazioni continue. Inclusioni continue. Esempi di omeomorfismi tra sottospazi di R^n. Prodotti, quozienti. La topologia prodotto di due topologie e lo spazio topologico prodotto. Esempi. Spazio topologico prodotto di n spazi e proprietà delle proiezioni su ciascun fattore. Caratterizzazione delle applicazioni continue a valori in uno spazio topologico prodotto. La topologia quoziente relativa ad un'applicazione. Identificazioni. Proprietà universale della topologia quoziente. Passaggio al quoziente di un'applicazione. Unicità dello spazio quoziente. La relazione di equivalenza associata ad un'identificazione. Esempi fondamentali di spazi quoziente: spazi proiettivi. Insiemi saturi per una relazione di equivalenza. Ulteriori esempi: la circonferenza; il cilindro, il toro, il nastro di Möbius.. Spazio che si ottiene da uno spazio topologico assegnato facendo collassare un sottoinsieme ad un punto. Proprietà di separazione. Assiomi di Frèchet e di Hausdorff: definizione e legame tra i due concetti. Esempi di spazi di Hausdorff: gli spazi metrizzabili, i sottospazi di uno spazio di Hausdorff. Definizione di limite di una successione di punti. Punti di aderenza e limiti di successioni. Unicità del limite di una successione di punti di uno spazio di Hausdorff. Relazione tra continuità e continuità per successioni. Ogni spazio metrizzabile è di Hausdorff. Spazi regolari, normali: definizione e legame tra i due concetti.

	Esempio di spazio T_3 che non è T_4; ogni spazio T_3 a base numerabile è T_4. Ogni spazio metrizzabile è normale. Applicazioni continue e assiomi di separazione. Catterizzazione degli spazi quoziente che sono di Hausdorff. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è uno spazio di Hausdorff. Spazi compatti. Ricoprimenti aperti di uno spazio topologico. Spazi topologici compatti: definizione e caratterizzazione. Sottospazi compatti: definizione e proprietà. Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. Un sottospazio compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato. Uno spazio compatto e metrizzabile è a base numerabile. La compattificazione di Alexandroff. Applicazioni continue definite su uno spazio compatto: proprietà fondamentali e applicazioni. Esempio: l'applicazione antipodale e la compattezza dello spazio proiettivo reale di dimensione n. Compattezza dello spazio topologico prodotto di n spazi compatti. Uno spazio compatto e di Hausdorff è normale. Esempi. Spazi connessi. Spazi topologici connessi (sconnessi): definizione e caratterizzazione. Sottoinsiemi connessi (sconnessi) di uno spazio topologico. Determinazione dei sottoinsiemi connessi di R. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso: proprietà e conseguenze. Il teorema del valor medio. Condizione sufficiente per la connessione dell'unione di una famiglia di sottoinsiemi connessi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi è connesso. Esempi di spazi connessi. Coppie di punti connessi in uno spazio topologico. La componente connessa individuata da un punto. Caratterizzazione degli spazi connessi in termini dell'esistenza di un'unica componente connessa. Proprietà delle componenti connesse. Determinazione delle componenti connesse di Q. Applicazioni della nozione di connessione: ogni intervallo del tipo [a,b) non è omeomorfo ad un intervallo del tipo (a, b); non esistenza di omeomorfismi tra R e R^2. Componenti connesse dei gruppi GL(n, R) e O(n). Spazi connessi per archi. Spazi topologici connessi per archi: definizione ed esempi. Sottoinsiemi convessi di R^n Ogni convesso di R^n è connesso per archi. Esempio di sottospazio di R^n connesso per archi e non convesso. Ogni spazio connesso per archi è connesso. Esempio di spazio connesso e non connesso per archi. Applicazioni continue definite su uno spazio connesso per archi: proprietà fondamentali e conseguenze. Lo spazio proiettivo reale n-dimensionale è connesso per archi. Definizione e caratterizzazione di spazio localmente Euclideo di dimensione n. Esempi: lo spazio euclideo e la sfera di dimensione $n \geq 1$. Ogni spazio connesso, localmente Euclideo è connesso per archi. Lo spazio topologico prodotto di n spazi connessi per archi è connesso per archi.
Testi di riferimento	A. Loi: Introduzione alla topologia generale, Aracne Editrice, 2013. M. Manetti: Topologia, Springer-Verlag Italia, 2014. E. Sernesi: Geometria 2, Bollati Boringhieri, 1994. G. Campanella: Esercizi di topologia generale, Aracne Editrice, 1992. M. H. Mortad: Introductory topology (exercises and solutions), II Edizione, World Scientific, 2017.
Note ai testi di riferimento	
Materiali didattici	

Risultati di apprendimento previsti (secondo i Descrittori di Dublino)	
DD1 Conoscenza e capacità di comprensione	Acquisizione di nuovi concetti geometrici e di nuove tecniche di dimostrazione;

DD2 Conoscenza e capacità di comprensione applicate	Le conoscenze acquisite si utilizzano in vari ambiti, sia della matematica che di altre discipline, per esempio la topografia e la teoria dei grafi.
DD3-5 Competenze trasversali	*DD3 Autonomia di giudizio*: Capacità di individuare metodiche utili per risolvere nuovi problemi
	DD4 Abilità comunicative: acquisizione del linguaggio matematico e di metodi di dimostrazione alquanto avanzati Capacità di esporre concetti in modo chiaro e sintetico.
	DD5 Capacità di apprendere: acquisizione di metodiche che favoriscano l'abilità di collegare i concetti introdotti in varie discipline matematiche.

Metodi didattici	

Valutazione	
Modalità di verifica dell'apprendimento	Esame orale. La prova d'esame consiste nello svolgimento di un esercizio, nell'esposizione di concetti ad esso strettamente collegati, nonché di esempi significativi e di teoremi oggetto dell'insegnamento.
Criteri di valutazione	• *Conoscenza e capacità di comprensione*: conoscenza dei concetti fondamentali di topologia elementare, dei risultati basilari della teoria e delle relative dimostrazioni. • *Conoscenza e capacità di comprensione applicate*: capacità di risolvere esercizi utilizzando in modo appropriato le metodiche sviluppate nelle esercitazioni, nonché applicando teoremi fondamentali. • *Autonomia di giudizio*: Capacità di ragionamento critico sugli argomenti del programma e abilità nel risolvere problemi in modo autonomo e coerente. • *Abilità comunicative*: capacità di esporre i concetti in modo chiaro • *Capacità di apprendere*: competenze nell'impiego del formalismo matematico e nell'individuare nessi logici anche con aromenti sviluppati in altri corsi.
Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	L'esame si intende superato quando il voto, attribuito in trentesimi, è maggiore o uguale a 18.

Ulteriori informazioni	