



CORSO DI STUDIO	LAUREA IN MATEMATICA (L-35)
ANNO ACCADEMICO	2023-2024
INSEGNAMENTO	ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE 1

Principali informazioni sull'insegnamento	
Anno di corso	Terzo
Periodo di erogazione	Primo semestre (25 settembre 2023 – 22 dicembre 2023)
Crediti formativi universitari (CFU)	7
Settore scientifico disciplinare (SSD)	MAT/03 – Geometria
Lingua di erogazione	Italiano
Modalità di frequenza	Facoltativa

Docente	
Nome e cognome	Giulia Dileo
Indirizzo mail	giulia.dileo@uniba.it
Telefono	+39 080 544 2654
Sede	Dipartimento di Matematica, stanza 5 secondo piano
Sede virtuale	Microsoft Teams – Piattaforma e-learning
Pagina web	https://www.dm.uniba.it/it/members/dileo
Ricevimento	Su appuntamento, da concordare per e-mail; in presenza o in remoto

Organizzazione della didattica	Totali	Didattica frontale	Pratica (esercitazioni)	Studio individuale
Ore	175	40	30	105
CFU	7	5	2	

Obiettivi formativi	
	Acquisizione delle nozioni fondamentali della geometria differenziale classica di curve e superfici, e della geometria delle varietà differenziabili.

Prerequisiti	
	Algebra e algebra lineare di base. Calcolo differenziale. Nozioni topologiche di base.

Syllabus	
Contenuti dell'insegnamento (Programma)	Curve. Curve parametrizzate in \mathbb{R}^n . Supporto, vettore tangente in un punto, regolarità. Campi di vettori lungo una curva. Campo vettoriale tangente. Cambiamenti di parametro. Lunghezza di una curva. Curve parametrizzate per lunghezza d'arco. Curve differenziabili: definizione di atlante, e differenziabilità dei cambiamenti di parametro, esempi. Riferimento di Frenet. Teorema di esistenza e unicità del riferimento canonico di Frenet. Equazioni di Frenet, comportamento rispetto a cambiamenti di parametro. Funzioni di curvatura, e comportamento rispetto a isometrie di \mathbb{R}^n . Esistenza e unicità a meno di isometrie di curve con assegnate funzioni di curvatura. Curve piane: esempi e proprietà. Caratterizzazioni di segmenti di retta e archi di circonferenza. Curve in \mathbb{R}^3 : curvatura, torsione, e caratterizzazione di curve a torsione nulla. Proiezioni di una curva su piani osculatore, normale e rettificante. Esempi.



Superfici. Superfici parametrizzate in \mathbb{R}^3 . Regolarità e spazio tangente in un punto. Campi di vettori lungo una superficie: campi di vettori tangenti e campi di vettori normali. Mappa di Gauss. Cambiamenti di parametri. Superfici differenziabili, definizione di atlante, esempi. Superfici di livello. I forma fondamentale. Operatore di Weingarten. II forma fondamentale. Comportamento rispetto a cambiamenti di parametri e isometrie di \mathbb{R}^3 . Curve su una superficie regolare. Linee coordinate. Teorema di Meusnier. Curvatura normale. Curvature principali e direzioni principali di curvatura. Punti ombelicali e caratterizzazione di superfici a punti tutti ombelicali. Curvatura di Gauss e curvatura media. Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari. Direzioni asintotiche. Linee asintotiche e linee di curvatura principale. Esempi: parametrizzazioni di superficie sferica, toro, superfici di rotazione, elicoide e superfici rigate.

Varietà differenziabili. Varietà topologiche: definizione, esempi e proprietà. Varietà differenziabili reali: carte locali, funzioni di transizione, atlanti differenziabili, atlante massimale. Esempi di varietà differenziabili: curve e superfici differenziabili, varietà di dimensione 0, \mathbb{R}^n , spazio vettoriale reale finitamente generato, sottovarietà aperta di una varietà differenziabile, gruppo lineare generale, sfera di dimensione n , spazio proiettivo reale di dimensione n , varietà prodotto di varietà differenziabili, toro n -dimensionale. Funzioni differenziabili su varietà. Applicazioni differenziabili tra varietà. Diffeomorfismi. Esempi. Proprietà topologiche di varietà differenziabili. Paracompattezza. Partizione dell'unità. Teorema di esistenza di partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento aperto. Prolungamento di una funzione differenziabile. Funzioni bump su varietà.

Vettori tangenti e covettori, campi vettoriali tangenti e 1-forme. Vettore tangente in un punto a una varietà differenziabile. Spazio tangente e base coordinata associata a una carta locale. Matrice di passaggio tra basi coordinate. Spazio tangente di uno spazio vettoriale. Spazio cotangente. Differenziale di una funzione differenziabile. Base coordinata dello spazio cotangente associata a una carta locale. Differenziale di un'applicazione differenziabile tra varietà: definizione e proprietà. Spazio tangente a una sottovarietà aperta. Spazio tangente a una varietà prodotto. Matrice associata al differenziale di una applicazione differenziabile, rispetto a basi coordinate. Immersioni, imbedding e sommersioni: definizioni ed esempi. Curve differenziabili e vettori tangenti. Fibrato tangente, fibrato cotangente, e loro sezioni. Campi vettoriali differenziabili. Prolungamento di campi vettoriali e vettori tangenti. Corrispondenza biunivoca tra sezioni differenziabili del fibrato tangente e derivazioni dell'algebra delle funzioni differenziabili. L'algebra di Lie dei campi vettoriali differenziabili. 1-forme differenziabili. Corrispondenza biunivoca tra sezioni differenziabili del fibrato cotangente e applicazioni lineari sul modulo dei campi vettoriali differenziabili.

Campi tensoriali e forme differenziabili. Elementi di algebra tensoriale su uno spazio vettoriale reale. Tensori di tipo (r,s) su uno spazio vettoriale. Tensori simmetrici e tensori alternanti. Prodotto wedge. Base e dimensione dello spazio delle k -forme su uno spazio vettoriale. Algebra di Grassmann. Campo tensoriale di tipo (r,s) su una varietà differenziabile. Campi tensoriali differenziabili e loro espressione in una carta locale. Campi tensoriali

	simmetrici e alternanti. Algebra di Grassmann delle forme differenziabili. Varietà orientabili. Differenziale esterno di una forma differenziabile.
Testi di riferimento	<ul style="list-style-type: none"> • Wilhelm Klingenberg, <i>A course in differential geometry</i>. Graduate Texts in Mathematics, 51. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978. • Manfredo P. do Carmo, <i>Differential geometry of curves and surfaces</i>. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. • John M. Lee, <i>Introduction to smooth manifolds</i>. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2003. • Marco Abate, Francesca Tovena, <i>Geometria differenziale</i>. Unitext, 54. Springer, Milan, 2011. • E. Sernesi, <i>Geometria 2</i>. Bollati Boringhieri, 2019.
Note ai testi di riferimento	
Materiali didattici	Note delle lezioni su piattaforma e-learning.

Risultati di apprendimento previsti (secondo i Descrittori di Dublino)	
DD1 Conoscenza e capacità di comprensione	Acquisizione di concetti e risultati fondamentali della teoria classica di curve e superfici differenziabili, e della geometria delle varietà differenziabili.
DD2 Conoscenza e capacità di comprensione applicate	Acquisizione del calcolo differenziale per curve, superfici e varietà differenziabili. Descrizione di esempi fondamentali. Acquisizione delle tecniche dimostrative di base della geometria differenziale.
DD3-5 Competenze trasversali	<i>DD3 Autonomia di giudizio</i> : Capacità di valutare la correttezza dei ragionamenti, sia dal punto di vista logico che formale. Capacità di risolvere problemi, anche di natura teorica.
	<i>DD4 Abilità comunicative</i> : Acquisizione di un linguaggio formale adeguato alla comprensione e presentazione dei risultati, e alla discussione di relativi problemi.
	<i>DD5 Capacità di apprendere</i> : Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato dalla consultazione di testi scientifici, e dalla ricerca di fonti per ulteriori approfondimenti.

Metodi didattici	
	La modalità di svolgimento dell'insegnamento è di tipo frontale.

Valutazione	
Modalità di verifica dell'apprendimento	La verifica dell'apprendimento avviene attraverso una prova orale, che consiste nell'esposizione di definizioni, enunciati e dimostrazioni relativi al programma sviluppato. Il colloquio prevede anche la discussione di esempi fondamentali e la risoluzione di esercizi.
Criteri di valutazione	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Conoscenza e capacità di comprensione</i>: completezza della preparazione e correttezza nell'esposizione. • <i>Conoscenza e capacità di comprensione applicate</i>: capacità di dimostrare i risultati della teoria; capacità di risolvere esercizi, anche di natura teorica. • <i>Autonomia di giudizio</i>: capacità di valutare la coerenza dei ragionamenti. • <i>Abilità comunicative</i>:



	<p>chiarezza espositiva, correttezza del linguaggio e del formalismo utilizzati, capacità dialogica.</p> <ul style="list-style-type: none">• <i>Capacità di apprendere:</i> capacità di individuare le tecniche e i procedimenti adeguati alle dimostrazioni e alla risoluzione dei problemi.
Criteria di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	La valutazione finale dell'esame è espressa in trentesimi. L'esame è superato con votazione minima di 18/30. Contribuiscono all'esito finale dell'esame la valutazione su chiarezza espositiva, padronanza di linguaggio, rigore metodologico e livello di approfondimento, che si evincono dalla esposizione di definizioni, enunciati e dimostrazioni, dalla discussione di esempi e dalla risoluzione di esercizi.
Ulteriori informazioni	
	La frequenza del corso è fortemente consigliata.