UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

CONSIGLIO INTERCLASSE IN MATEMATICA

| | |
|---|---|
| **CORSO DI STUDIO** | **LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA (LM-40)** |
| **ANNO ACCADEMICO** | **2023-2024** |
| **INSEGNAMENTO** | **ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE** |

| **Principali informazioni sull'insegnamento** | |
|---|---|
| Anno di corso | Primo |
| Periodo di erogazione | Secondo semestre (26 febbraio 2024 – 31 maggio 2024) |
| Crediti formativi universitari (CFU) | 7 |
| Settore scientifico disciplinare (SSD) | MAT/05 – Analisi Matematica |
| Lingua di erogazione | Italiano |
| Modalità di frequenza | Facoltativa (fortemente consigliata) |

| **Docente** | |
|---|---|
| Nome e cognome | Marcello D'Abbicco |
| Indirizzo mail | marcello.dabbicco@uniba.it |
| Telefono | +39 080 544 2721 |
| Sede | Dipartimento di Matematica, stanza 36 secondo piano |
| Sede virtuale | marcello.dabbicco@uniba.it |
| Pagina web | https://www.dm.uniba.it/it/members/dabbicco |
| Ricevimento | su appuntamento, per e-mail; ricevimento presso lo studio del docente |

**Organizzazione della didattica**

| | Totali | Didattica frontale | Pratica (esercitazioni) | Studio individuale |
|---|---|---|---|---|
| **Ore** | 175 | 40 | 30 | 105 |
| **CFU** | 7 | 5 | 2 | |

| **Obiettivi formativi** | |
|---|---|
| | Acquisizione di strumenti avanzati dell'analisi moderna: funzionali lineari continui su spazi normati e spazi localmente convessi; funzioni test e distribuzioni; convoluzione e trasformate di Fourier e di Laplace in spazi funzionali e distribuzionali, introduzione agli spazi di Sobolev, soluzione fondamentale di equazioni di evoluzione alle derivate parziali. |

| **Prerequisiti** | |
|---|---|
| | Conoscenze di: analisi matematica classica in una e più variabili, topologia generale, algebra lineare, teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue, analisi complessa in una variabile. |

| **Syllabus** | |
|---|---|
| Contenuti dell'insegnamento (Programma) | **1. Spazi localmente convessi e distribuzioni**<br>Definizione di gruppo topologico e separazione di compatti e chiusi; definizione di spazio vettoriale topologico (SVT), spazi seminormati e normati; **topologia di SVT a partire da una famiglia di seminorme;** spazi di Banach e di Fréchet; convergenza indotta dalle seminorme; esempi: C(Ω), *E*(Ω), $D_K$, spazio di Schwartz $S(\mathbf{R}^n)$; insiemi convessi e bilanciati, **costruzione delle seminorme su SVT localmente convessi**, spazi normabili, spazi $L^p$ con p in (0,1); **costruzione e proprietà della topologia di *D*(Ω).** |

| | |
|---|---|
| | Operatori lineari continui su SVT; immersioni continue; **norma e completezza dello spazio degli operatori lineari continui su spazi normati**; teorema di rappresentazione di Riesz in $L^p$ [solo enunciato]; continuità dei funzionali lineari localmente limitati su SVT**;** duale di $E(\Omega)$, $D_K$, $S(\mathbf{R}^n)$;operatori lineari continui su $D(\Omega)$; **teorema di Hahn-Banach in SVT localmente convessi e in spazi normati**; biduale e riflessività di uno spazio normato; riflessività dei sottospazi chiusi di spazi riflessivi; distribuzioni, derivata distribuzionale; **P.V. 1/x**; ordine di una distribuzione; moltiplicazione fra funzioni e distribuzioni, convergenza distribuzionale. **Esercizi.**<br><br>**2. Convoluzione e distribuzioni a supporto compatto**<br>Richiami sugli spazi di misura; classi monotone, teorema di Halmos; costruzione della misura prodotto di spazi σ-finiti e controesempio, teoremi di Tonelli e di Fubini e controesempi; applicazioni.<br>Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin [solo enunciato]; **teorema di Young sulla convoluzione**; supporto della convoluzione; regolarità della convoluzione; successioni approssimanti dell'unità; **convergenza della convoluzione con approssimanti dell'unità**; mollificatori; **lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.**<br>**Lemmi $C^\infty$ di Urysohn e di partizione dell'unità**; supporto di una distribuzione; densità di $C_c^\infty$ in $E(\Omega)$ e in $S(\mathbf{R}^n)$; **teorema di caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto**; distribuzioni sommabili; **teorema di rappresentazione locale delle distribuzioni;** teorema di rappresentazione delle distribuzioni a supporto compatto; convoluzione fra funzioni e distribuzioni; densità delle funzioni regolari nelle distribuzioni; convoluzione fra distribuzioni. **Esercizi.**<br><br>**3 Trasformata di Fourier e di Laplace**<br>Trasformata di Fourier in $L^1$ e proprietà; teorema di Riemann-Lebesgue; **trasformata di Fourier e derivata**; nuclei di Gauss-Weierstrass in $\mathbf{R}^n$, nuclei di Fejér e nuclei di Abel-Poisson in **R**; **teorema di inversione in $L^1$ e in $S$**; non surgettività della trasformata da $L^1$ in $C_0$; **teorema di Plancherel**; proprietà della trasformata di Fourier in $L^2$; disuguaglianza di Hausdorff-Young.<br>Trasformata di Laplace e proprietà; **trasformata di Laplace e derivata**; trasformata della convoluzione; applicazioni ai problemi di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie; equazione delle onde sulla semiretta; formula di Riemann-Fourier; equazione del calore sulla semiretta.<br>Trasformata di Laplace di una distribuzione *L*-trasformabile e di una distribuzione a supporto compatto. **Esercizi.**<br><br>**4. Distribuzioni temperate, spazi di Sobolev ed equazioni di evoluzione**<br>Distribuzioni temperate e trasformata di Fourier, funzioni a crescita lenta; **trasformata delle distribuzioni a supporto compatto**; **teorema di Paley-Wiener**; trasformata di Hilbert; trasformata di Fourier di funzioni radiali. **Esercizi.**<br>Completezza, separabilità e riflessività degli spazi di Sobolev; caratterizzazione delle funzioni in $L^p(\Omega)$, p>1, che sono in $W^{1,p}(\Omega)$; spazio $H^s(\mathbf{R}^n)$ con s reale positivo e negativo; **teorema di immersione di $H^s(\mathbf{R}^n)$** e ottimalità; potenziale di Bessel e **teorema di rappresentazione del duale di $H^s(\mathbf{R}^n)$**; teoremi di immersione continua per gli spazi $W^{m,p}$ [solo enunciato]; ottimalità dell'esponente critico di immersione; spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$; **densità** |

| | |
|---|---|
| | **delle funzioni test in $\mathbf{W^{m,p}}$ ($\mathbf{R}^n$)**; lo spazio $W^{-m,p'}(\Omega)$ come duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$; **teorema di rappresentazione per $\mathbf{W^{-1,p'}(\Omega)}$.**<br>**Equazione del calore**: principio di Duhamel, soluzione fondamentale, stime di decadimento in tempo; **equazione delle onde**: soluzione fondamentale, velocità di propagazione finita, stime in $H^s$, conservazione dell'energia; equazione di Klein-Gordon e stime in $H^s$; equazione di Schrödinger e conservazione delle norme in $H^s$; equazione della piastra. |
| Testi di riferimento | W. RUDIN, Analisi funzionale, McGraw-Hill<br>W. RUDIN, Analisi reale e complessa, Boringhieri<br>G. GILARDI, Analisi 3, Mc Graw-Hill<br>F. TOMARELLI, Mathematical Analysis Tools for Engineering, Esculapio |
| Note ai testi di riferimento | |
| Materiali didattici | Il materiale didattico è reperibile sulla pagina web del docente, in particolare nella forma di un testo con gli argomenti trattati, con spazio al margine e nell'interlinea per prendere appunti durante le lezioni. |

| **Risultati di apprendimento previsti (secondo i Descrittori di Dublino)** | |
|---|---|
| DD1 Conoscenza e capacità di comprensione | Acquisizione di strumenti avanzati dell'analisi moderna e delle relative tecniche dimostrative: spazi normati e localmente convessi, teoria delle distribuzioni, prodotto di convoluzione, trasformata di Fourier e di Laplace, soluzione fondamentale di equazioni alle derivate parziali |
| DD2 Conoscenza e capacità di comprensione applicate | Capacità di operare con prodotto di convoluzione, trasformata di Fourier e trasformata di Laplace, in spazi funzionali e distribuzionali.<br>Capacità di utilizzare gli strumenti acquisiti per la risoluzione e lo studio qualitativo delle proprietà della soluzione di problemi al valor iniziale e al valor iniziale con condizioni al bordo per equazioni alle derivate parziali di evoluzione |
| DD3-5 Competenze trasversali | *DD3 Autonomia di giudizio*:<br>La capacità di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione viene sviluppata discutendo le dimostrazioni in aula.<br>La capacità di individuare i giusti strumenti matematici e le giuste tecniche per affrontare problemi di matematica complessi, inclusa la capacità di individuare le strategie migliori in termini di eleganza, rapidità, correttezza formale e completezza, viene sviluppata risolvendo e discutendo in aula gli esercizi assegnati. |
| | *DD4 Abilità comunicative*:<br>La capacità di utilizzare in modo corretto e chiaro il linguaggio e il formalismo matematico avanzato nell'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi viene sviluppata durante le lezioni ed esercitazioni in aula.<br>La capacità di proporre ed esporre in modo chiaro e comprensibile al pubblico le soluzioni individuate ai problemi assegnati viene sviluppata quando si viene alla lavagna ad esporre gli esercizi svolti. |
| | *DD5 Capacità di apprendere*:<br>Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi, dalla capacità di approfondire autonomamente gli argomenti trattati, e dalla risoluzione di esercizi e quesiti proposti durante il corso. |

| **Metodi didattici** | |
|---|---|
| | L'insegnamento viene erogato mediante didattica frontale, con l'ausilio di lavagna e video-proiettore, e sulla base di appunti preparati dal docente e messi a disposizione anticipatamente. |

| | |
|---|---|
| | Durante le lezioni, sarà proposto lo svolgimento di esercizi il cui obiettivo è di impiegare le conoscenze acquisite mettendole in pratica, in modo da chiarirne gli aspetti più profondi con esempi pratici. Gli esercizi assegnati saranno poi discussi in aula nelle successive lezioni in modo interattivo. È consentito il lavoro di gruppo per lo svolgimento degli esercizi. |

| **Valutazione** | |
|---|---|
| Modalità di verifica dell'apprendimento | La verifica avviene mediante prova orale alla lavagna, durante la quale viene richiesta l'esposizione degli argomenti trattati, inclusa la presentazione di definizioni, enunciati e dimostrazioni, con particolare riferimento agli argomenti evidenziati in grassetto nel programma, e la risoluzione di esercizi in cui vengono impiegati gli strumenti teorici acquisiti. La prova viene svolta in forma di colloquio, durante il quale si deve dimostrare di essere in grado di spiegare e chiarire i concetti esposti e i passaggi delle dimostrazioni, inclusi gli strumenti impiegati, anche relativi alle conoscenze previste dai prerequisiti del corso. La prova orale può eventualmente essere integrata da una prova scritta.<br>Facoltativamente, si può optare per lo svolgimento di prove intermedie che si terranno durante il corso e riguarderanno gli argomenti svolti fino al momento della prova intermedia, suddivisi nei capitoli del programma. Il superamento delle prove intermedie, in numero compreso fra una e tre, concorre alla valutazione finale mediante media ponderata di giudizi e voti. |
| Criteri di valutazione | • *Conoscenza e capacità di comprensione:*<br>o Correttezza formale e completezza dell'esposizione<br>o Capacità di presentare correttamente gli strumenti impiegati nelle dimostrazioni<br>o Capacità di rispondere correttamente ed esaustivamente alle richieste di chiarimento e approfondimento degli argomenti esposti<br>• *Conoscenza e capacità di comprensione applicate:*<br>o Correttezza degli strumenti impiegati e completezza delle risoluzioni presentate<br>• *Autonomia di giudizio*:<br>o Capacità di individuare gli strumenti e le tecniche più adeguati per rispondere al quesito o al problema assegnato<br>• *Abilità comunicative:*<br>o Correttezza formale del linguaggio logico-matematico e chiarezza espositiva<br>o Chiarezza della presentazione delle proprie risposte ai quesiti posti<br>• *Capacità di apprendere:*<br>o Correttezza delle risoluzioni proposte agli esercizi assegnati |
| Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale | Il voto finale è attribuito in trentesimi. L'esame si intende superato quando il voto è maggiore o uguale a 18.<br>La sufficienza si intende raggiunta quando si è in grado di esporre chiaramente concetti, enunciati e dimostrazioni sui principali temi trattati nel corso, ed è in grado di dimostrare di aver compreso gli argomenti esposti, rispondendo correttamente ed esaurientemente alle domande di chiarimento poste durante l'esposizione.<br>Una valutazione più elevata viene raggiunta in presenza dei seguenti elementi: capacità di esporre in modo chiaro e completo, con le relative |

| | |
|---|---|
| | dimostrazioni, i diversi argomenti trattati nel programma; capacità di rispondere in modo autonomo e corretto a domande relative all'approfondimento degli argomenti trattati; capacità di risolvere ed esporre lo svolgimento degli esercizi proposti durante il corso; capacità di individuare soluzioni a quesiti originali proposti durante la prova, basati sugli strumenti acquisiti durante il corso; capacità di risolvere esercizi originali proposti durante la prova applicando opportunamente strumenti e tecniche acquisiti durante il corso. |

| **Ulteriori informazioni** | |
|---|---|
| | |