CONSIGLIO INTERCLASSE IN MATEMATICA

Principali informazioni sull'insegnamento		
Denominazione dell'insegnamento	***Istituzioni di Analisi Superiore 2*** ***Elements of Advanced Analysis 2***	
Corso di studio	*Matematica*	
Anno di corso	*2021-22*	
Crediti formativi universitari (CFU) / European Credit Transfer and Accumulation System (ECTS):		: 7
SSD	*Analisi Matematica MAT/05*	
Lingua di erogazione	*Italiano*	
Periodo di erogazione	*II Semestre*	
Obbligo di frequenza	*Fortemente consigliata*	

Docente	
Nome e cognome	Marcello D'Abbicco
Indirizzo mail	marcello.dabbicco@uniba.it
Telefono	080 544 2721
Sede	*Dip. Matematica piano 2, stanza 36*
Sede virtuale	*Profilo Microsoft Teams: marcello.dabbicco@uniba.it*
Ricevimento (giorni, orari e modalità)	da concordare via e-mail

Syllabus	
Obiettivi formativi	Acquisizione di strumenti avanzati dell'analisi moderna, fra i quali: elementi di analisi funzionale in spazi localmente convessi, prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier, distribuzioni, spazi di Sobolev, trasformata di Laplace, problemi di Cauchy per equazioni di evoluzione alle derivate parziali.
Prerequisiti	*Conoscenze di: analisi matematica classica in una e più variabili, topologia generale, algebra lineare, teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue, analisi complessa in una variabile.*
Contenuti di insegnamento (Programma)	*1. Elementi di analisi funzionale in spazi localmente convessi* *Definizione di spazio vettoriale topologico (SVT); separazione di compatti e chiusi in SVT [Dim]; definizione di insiemi convessi, limitati e bilanciati in SVT; definizione di spazio localmente convesso e di Fréchet; struttura di spazio localmente convesso a partire da una famiglia separata di seminorme [Dim]; metrica associata a una famiglia numerabile separata di seminorme [Dim]; esempi: $C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, D_K; proprietà del funzionale di Minkowski [Dim]; famiglia di seminorme associata a una base locale convessa bilanciata [Dim]; spazi normabili come spazi con un intorno limitato convesso [Dim]; caratterizzazione della continuità degli operatori lineari fra SVT metrizzabili [Dim]; teorema di Baire in spazi metrici completi e in spazi di Hausdorff localmente compatti [Dim]; teorema di Banach-Steinhaus in SVT con metrica completa [Dim]; caratterizzazione della continuità di funzionali lineari su SVT [Dim]; completezza dello spazio degli operatori lineari limitati su spazi normati [Dim]; teorema di rappresentazione di Riesz in L^p, p in $[1,\infty)$ [solo enunciato]; teoremi di Hahn-Banach in SVT: per funzionali reali subadditivi [Dim], per seminorme [Dim], formulazione geometrica [Dim]; corollari dei teoremi di Hahn-Banach in SVT [Dim]; topologia localmente convessa su X associata a uno spazio vettoriale di funzionali lineari che separa i punti di X [Dim]; definizione di topologia debole; i chiusi convessi sono debolmente chiusi in SVT con il duale che separa i punti [Dim]; debole chiusura della sfera unitaria in uno spazio normato di dimensione infinita [Dim]; convergenza debole in SVT; limitatezza degli insiemi*

	debolmente limitati in SVT localmente convessi [solo enunciato]; definizione di topologia debole e convergenza debole* in SVT; definizione di biduale di uno spazio normato e di spazio riflessivo; riflessività degli spazi L^p, p in (1,∞) [solo enunciato]; riflessività dei sottospazi chiusi di riflessivi [Dim]; altri teoremi di analisi funzionale in SVT: applicazione aperta, grafico chiuso, Banach-Alaoglu [solo enunciati].* *2. Prodotto di convoluzione e trasformata di Fourier* *Misure in spazi prodotto: i teoremi astratti di Halmos [Dim] e Hahn Kolmogorov [Dim]; algebra degli insiemi elementari; misura prodotto dei rettangoli misurabili in spazi σ-finiti [Dim]; teorema di Fubini–Tonelli [Dim] e controesempi; prodotto di convoluzione e proprietà in L^1 [Dim]; uniforme continuità delle traslazioni da R^n in L^p [Dim]; teorema di Young [Dim]; derivata del prodotto di convoluzione [Dim]; supporto della convoluzione; successioni approssimanti dell'unità e mollificatori; convergenza in L^p, puntuale e uniforme del prodotto con approssimanti dell'unità [Dim]; lemma fondamentale del calcolo delle variazioni [Dim]; convoluzione con misure; convergenza nel senso delle misure; trasformata di Fourier in L^1 e proprietà [Dim]: trasformata della convoluzione, delle traslazioni, delle rotazioni; teorema di moltiplicazione in L^1 [Dim]; teorema di Riemann-Lebesgue [Dim]; calcolo della trasformata di Fourier di importanti nuclei di convoluzione: nuclei di Fejér [Dim]; nuclei di Abel-Poisson in dimensione 1 [Dim], nuclei di Gauss-Weierstrass [Dim]; teorema di inversione in L^1 [Dim]; non surgettività della trasformata da L^1 in C_0 [Dim]; comportamento della trasformata rispetto alla derivazione [Dim]: trasformata della derivata, derivata della trasformata, analiticità della trasformata di funzioni a decrescita esponenziale, trasformata di funzioni a supporto compatto; spazio di Schwartz come spazio di Fréchet; proprietà della trasformata di Fourier nello spazio di Schwartz [Dim]; densità delle funzioni test nello spazio di Schwartz [Dim]; costruzione della trasformata di Fourier in L^2: il teorema di Plancherel [Dim]; teorema di moltiplicazione in L^2 [Dim]; trasformata della convoluzione con un fattore in L^1 e uno in L^2 [Dim]; trasformata di Fourier delle misure; Teorema di Riesz-Thorin [solo enunciato] e disuguaglianza di Hausdorff-Young.* *3. Introduzione alle distribuzioni* *Topologia dello spazio D(Ω) delle funzioni test e sue proprietà [Dim]: locale convessità, caratterizzazione dei limitati, proprietà di Heine-Borel, completezza; caratterizzazione della continuità per gli operatori lineari su D(Ω) [Dim]; definizione di distribuzione; non metrizzabilità di D(Ω); funzioni localmente L^1 e misure come distribuzioni; derivata distribuzionale; derivata della funzione di Heaviside; P.V. 1/x; ordine di una distribuzione; moltiplicazione fra funzioni test e distribuzioni; regola di Leibniz; convergenza distribuzionale; limite di distribuzioni puntualmente convergenti come distribuzione; lemma di Urysohn [Dim]; partizione dell'unità [Dim]; supporto di una distribuzione; lo spazio di Fréchet E(Ω); teorema di caratterizzazione delle distribuzioni a supporto compatto [Dim]; finitezza dell'ordine delle distribuzioni a supporto compatto [Dim]; distribuzioni supportate in un punto come combinazione lineare di derivate di delta di Dirac [Dim]; soluzioni di xT=0 [Dim]; le distribuzioni con derivata nulla su un intervallo sono costanti [Dim]; teorema di rappresentazione locale delle distribuzioni come derivate di funzioni [Dim]; teorema di rappresentazione delle distribuzioni a supporto compatto come somma di derivate di funzioni [Dim]; distribuzioni traslate; derivata distribuzionale in R come limite distribuzionale del rapporto incrementale [Dim]; convoluzione fra funzioni e distribuzioni; approssimazione delle distribuzioni con funzioni test [Dim]; rappresentazione dei funzionali lineari continui che commutano*

	con le traslazioni come operatori di convoluzione con una distribuzione [Dim]; convoluzione fra distribuzioni e proprietà; il concetto di soluzione fondamentale; caratterizzazione delle distribuzioni a simmetria radiale; Laplaciano radiale e soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace in R^n [Dim]; distribuzioni temperate, esempi, funzioni a crescita lenta; trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate e proprietà; trasformata di Fourier delle distribuzioni a supporto compatto [Dim]; teorema di Paley-Wiener [Dim solo della parte sufficiente]; esistenza della soluzione fondamentale di un'equazione a coefficienti costanti in $\mathbf{R}^n$ [solo enunciato]; trasformata di Hilbert e teorema di Riesz-Kolmogorov [solo enunciato]; trasformata della convoluzione [Dim] di: due funzioni in L^2, una funzione di Schwartz e una distribuzione temperata, una distribuzione temperata e una a supporto compatto; distribuzioni omogenee; trasformata di Fourier di $\|x\|^a$ con a in (-n,0) [Dim]; trasformata di Fourier a simmetria radiale – cenni sulle funzioni di Bessel. *Esercizi sulle distribuzioni.* *4. Spazi di Sobolev* *Completezza, separabilità e riflessività degli spazi di Sobolev [Dim]; caratterizzazione delle funzioni in $L^p(\Omega)$, p>1, che sono in $W^{1,p}(\Omega)$ [Dim]; spazio $H^s(R^n)$ con s reale positivo e negativo; distribuzioni a supporto compatto come distribuzioni in $H^{-\infty}$; definizione di spazio potenziale di Bessel; teorema di immersione di $H^s(R^n)$ in $C_0(R^n)$ [Dim] e ottimalità nel caso s=1 e n=2 [Dim]; Lemma di Sobolev per l'immersione di funzioni localmente in $H^s(\Omega)$ in $C(\Omega)$; spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$; densità delle funzioni test in $W^{m,p}(R^n)$ [Dim]; lo spazio $W^{-m,p'}(\Omega)$ come duale di $W_0^{m,p}(\Omega)$; teorema di rappresentazione per $W^{-1,p'}(\Omega)$ [Dim]; teoremi di immersione continua per gli spazi $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ [Dim nei casi in cui l'esponente critico è <∞ e =∞]; ottimalità dell'esponente critico di immersione [Dim].* *5. Problema di Cauchy per equazioni di evoluzione in R^n* *Equazione del calore: principio di Duhamel, regolarità della soluzione fondamentale, stime di decadimento in tempo; equazione delle onde: soluzione fondamentale, velocità di propagazione finita, stime in H^s e regolarità della soluzione; equazione di Klein-Gordon e stime in H^s; equazione di Schrödinger, regolarità della soluzione e conservazione della massa; equazione della piastra.* *6. Trasformata di Laplace e applicazioni a equazioni di evoluzione su intervalli* *Trasformata di Laplace di una funzione e proprietà [Dim]: limitatezza e annullamento all'infinito, semipiano di olomorfia e derivata della trasformata, trasformata della derivata, trasformata e dilatazioni, traslazioni, rotazioni, funzione integrale, trasformata della convoluzione; trasformata di Laplace di una distribuzione e di una distribuzione a supporto compatto; convergenza nel senso delle distribuzioni L-trasformabili; trasformata di Laplace della funzione di Bessel J_0; esempi di funzioni L-trasformabili come distribuzioni, ma non L-trasformabili come funzioni; Gamma di Eulero come trasformata di Laplace di $t_+^{\alpha-1}$; Beta di Eulero; limiti a 0+ e a +∞ della trasformata di Laplace a partire dai limiti di $u(t)t^{1-\alpha}$ [Dim]; formula di Riemann-Fourier per l'antitrasformata di Laplace [solo enunciato]; soluzione fondamentale L-trasformabile; applicazioni della trasformata di Laplace alla risoluzione di problemi di Cauchy per ODE, equazione del calore su un intervallo limitato e sulla semiretta, equazione delle onde su un intervallo limitato e sulla semiretta.*
Testi di riferimento	*W. RUDIN, Analisi funzionale, McGraw-Hill* *W. RUDIN, Analisi reale e complessa, Boringhieri* *G. GILARDI, Analisi 3, Mc Graw-Hill* *F. TOMARELLI, Mathematical Analysis Tools for Engineering, Esculapio*

Note ai testi di riferimento	*Si vedano, inoltre, gli appunti del corso, web www.dabbicco.com*

Organizzazione della didattica			
Ore			
Totali	Didattica frontale	Pratica (laboratorio, campo, esercitazione, altro)	Studio individuale
175	*72*	*0*	*103*
CFU/ETCS			
7	*7*	*0*	

Metodi didattici	
	L'insegnamento viene erogato mediante didattica frontale, con l'ausilio di lavagna e video-proiettore, e sulla base di appunti preparati dal docente e messi a disposizione anticipatamente agli studenti. *Durante le lezioni, sarà proposto lo svolgimento di esercizi il cui obiettivo è di impiegare le conoscenze acquisite mettendole in pratica, in modo da chiarirne gli aspetti più profondi con esempi pratici. Gli esercizi assegnati saranno poi discussi in aula nelle successive lezioni in modo interattivo con gli studenti. E' consentito il lavoro di gruppo per lo svolgimento degli esercizi.* *Il Corso di insegnamento non è erogato in modalità e-learning, salvo diverse disposizioni.*

Risultati di apprendimento previsti	
Conoscenza e capacità di comprensione	○ Acquisizione di concetti fondamentali dell'analisi funzionale in spazi localmente convessi ○ Acquisizione degli strumenti del prodotto di convoluzione, della trasformata di Fourier e della trasformata di Laplace in diversi spazi funzionali e distribuzionali ○ Acquisizione delle relative tecniche dimostrative
Conoscenza e capacità di comprensione applicate	○ Capacità di operare con operatori differenziali, prodotto di convoluzione, trasformata di Fourier e trasformata di Laplace, in spazi funzionali e distribuzionali ○ Capacità di utilizzare gli strumenti acquisiti per la risoluzione e lo studio qualitativo delle proprietà della soluzione di problemi al valor iniziale e al valor iniziale con condizioni al bordo per equazioni alle derivate parziali di evoluzione
Competenze trasversali	• *Autonomia di giudizio* ○ Capacità di valutare la coerenza del ragionamento logico utilizzato in una dimostrazione ○ Capacità di individuare i giusti strumenti matematici e le giuste tecniche per affrontare problemi matematica complessi ○ Capacità di individuare le strategie migliori in termini di eleganza, rapidità, correttezza formale e completezza, per risolvere gli esercizi assegnati • *Abilità comunicative* ○ Capacità di utilizzare in modo corretto e chiaro il linguaggio e il formalismo matematico avanzato nell'esposizione delle conoscenze acquisite, la descrizione, l'analisi e la risoluzione dei problemi ○ Capacità di proporre ed esporre in modo chiaro e comprensibile al pubblico le soluzioni individuate ai problemi assegnati • *Capacità di apprendere in modo autonomo*

	○ Acquisizione di un metodo di studio adeguato, supportato della consultazione dei testi, dalla capacità di approfondire autonomamente gli argomenti trattati, e dalla risoluzione di esercizi e quesiti proposti durante il corso.

Valutazione	
Modalità di verifica dell'apprendimento	*La verifica avviene mediante prova orale alla lavagna, durante la quale viene richiesta l'esposizione degli argomenti trattati, inclusa la presentazione di definizioni, enunciati e dimostrazioni, e l'esposizione della risoluzione di esercizi in cui vengono impiegati gli strumenti teorici acquisiti. La prova viene svolta in forma di colloquio, durante il quale lo studente deve dimostrare di essere in grado di spiegare e chiarire i concetti esposti, inclusi gli strumenti impiegati, anche relativi alle conoscenze previste dai prerequisiti del corso. La prova orale può eventualmente essere integrata da una prova scritta.* *Facoltativamente, lo studente può optare per lo svolgimento di prove intermedie che si terranno durante il corso e riguarderanno gli argomenti svolti fino al momento della prova intermedia, suddivisi nei capitoli del programma. Il superamento delle prove intermedie, in numero compreso fra una e tre, concorre alla valutazione finale mediante media ponderata di giudizi e voti.*
Criteri di valutazione	• *Conoscenza e capacità di comprensione:* ○ Correttezza formale e completezza dell'esposizione ○ Capacità di presentare correttamente gli strumenti impiegati nelle dimostrazioni ○ Capacità di rispondere correttamente ed esaustivamente alle richieste di chiarimento e approfondimento degli argomenti esposti • *Conoscenza e capacità di comprensione applicate:* ○ Correttezza degli strumenti impiegati e completezza delle risoluzioni presentate • *Autonomia di giudizio*: ○ Capacità di individuare gli strumenti e le tecniche più adeguati per rispondere al quesito o al problema assegnato • Abilità comunicative: ○ Correttezza formale del linguaggio logico-matematico e chiarezza espositiva ○ Chiarezza della presentazione delle proprie risposte ai quesiti posti • Capacità di apprendere: ○ Correttezza delle risoluzioni proposte agli esercizi assegnati
Criteri di misurazione dell'apprendimento e di attribuzione del voto finale	*Il voto finale è attribuito in trentesimi. L'esame si intende superato quando il voto è maggiore o uguale a 18.* *La sufficienza si intende raggiunta quando lo studente è in grado di esporre chiaramente concetti, enunciati e dimostrazioni sui principali temi trattati nel corso, ed è in grado di dimostrare di aver compreso gli argomenti esposti, rispondendo correttamente ed esaurientemente alle domande di chiarimento poste durante l'esposizione.* *Una valutazione più elevata viene raggiunta in presenza dei seguenti elementi: capacità di esporre in modo chiaro e completo, con le relative dimostrazioni, tutti gli argomenti trattati nel programma; capacità di rispondere in modo autonomo e corretto a domande relative all'approfondimento degli argomenti trattati; capacità di risolvere ed esporre lo svolgimento degli esercizi proposti durante il corso; capacità di individuare soluzioni a quesiti originali proposti durante la prova, basati sugli strumenti acquisiti durante il corso; capacità di risolvere esercizi originali*

	proposti durante la prova applicando opportunamente strumenti e tecniche acquisiti durante il corso.
Altro	