Proposta Progetto di Ricerca GNAMPA 2024

Titolo del Progetto:

Tecniche di approssimazione in spazi funzionali con applicazioni a problemi di diffusione

Responsabile del progetto:
Prof.ssa Mirella Cappelletti Montano (Università degli Studi di Bari A. Moro)

Partecipanti
Prof.ssa Laura Angeloni (Università degli Studi di Perugia)
Prof. Michele Campiti (Università del Salento)
Prof. Danilo Costarelli (Università degli Studi di Perugia)
Prof.ssa Vita Leonessa (Università degli Studi della Basilicata)
Dott.ssa Mariarosaria Natale (Università degli Studi di Firenze)

Descrizione scientifica del progetto

Lo scopo del progetto è approfondire le proprietà matematiche di certi operatori integrali, costruiti con metodi probabilistici, in spazi di funzioni di interesse nell'ambito dell'Analisi Funzionale, dell'Analisi Reale e di Fourier. Si vogliono anche analizzare le possibili applicazioni di siffatte questioni a problemi differenziali di diffusione.

Stato dell'arte

Il presente progetto si articola su due linee di ricerca strettamente connesse tra di loro.

La prima linea di ricerca consiste nel costruire processi di approssimazione di tipo integrale, a partire da opportune distribuzioni di probabilità.

Negli ultimi anni, infatti, per fornire una valutazione oggettiva della qualità di certi prodotti software, sono state introdotte moltissime metriche, denominate *metriche software*. Esse consentono di misurare alcuni parametri del software, quali le sue dimensioni, la sua complessità, le sue caratteristiche di qualità interne (flessibilità, portabilità, leggibilità, ecc...) ed esterne (correttezza, efficienza, adattività, ecc...).

Nello studio delle metriche software è importante determinare distribuzioni di probabilità che possano adattarsi alla mole e alla complessità dei dati empirici. In tal senso, le distribuzioni a due parametri possono essere considerate un utile strumento di indagine.

In questo filone di ricerca si inquadra lo studio svolto in [24], dove, per meglio gestire i data set di certe metriche software, è stata utilizzata una opportuna estensione della distribuzione di Lindley (si vedano [23], [25]), introdotta in [26] e detta distribuzione di tipo "power Lindley", la cui funzione di densità di probabilità è data da

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha\beta^2}{\beta+1}(1+t^\alpha)t^{\alpha-1}e^{-\beta t^\alpha} \qquad t>0, \alpha, \beta > 0\,. \tag{1}$$

A partire da funzioni di densità di probabilità, è possibile introdurre operatori integrali che, come è noto, rivestono un importante ruolo nell'ambito della Teoria dell'Approssimazione (esempi di operatori integrali costruiti attraverso metodi probabilistici si possono trovare, ad esempio, in [1], [10]). Lo studio di tali questioni è anche connesso con il fatto che, attraverso alcune tecniche tipiche della Teoria dell'Approssimazione, è possibile affrontare problemi riguardanti l'approssimazione di semigruppi di operatori definiti su opportuni spazi funzionali e, quindi, la rappresentazione costruttiva delle soluzioni di determinati problemi di diffusione associati ai loro generatori.

Questo è l'obiettivo anche della seconda linea di ricerca del presente progetto. Recentemente, infatti, ispirati da [5], nel contesto di un intervallo J non compatto di $\mathbb{R}$, nel lavoro [4] gli autori hanno considerato certe successioni $(C_n)_{n\geq 1}$ di operatori lineari positivi costruiti tramite una famiglia di misure di probabilità $(\mu_x)_{x\in J}$, una successione $(\mu_n)_{n\geq 1}$ di misure di probabilità su J e un parametro $r>0$. Più precisamente, se f appartiene a opportuni spazi funzionali, per ogni $n \geq 1$,

$$C_n(f)(x) = \int_J \cdots \int_J f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n+rx_{n+1}}{n+r}\right) d\mu_x(x_1)\cdots d\mu_x(x_n)\, d\mu_n(x_{n+1}). \tag{2}$$

In [4] gli autori hanno ottenuto risultati di approssimazione costruttiva tramite gli operatori C_n per funzioni definite su spazi di funzioni continue con peso; si sottolinea, in particolare, che il peso è scelto in modo molto generale, così come è generale la struttura degli operatori C_n. Infatti, per particolari scelte del parametro r e delle misure $(\mu_x)_{x\in J}$ e $(\mu_n)_{n\geq 1}$, si possono ritrovare moltissimi processi di approssimazione noti in letteratura. Gli autori hanno anche ottenuto una formula asintotica per gli operatori C_n, che coinvolge un opportuno operatore differenziale del secondo ordine. Questi risultati si inquadrano nell'ambito di un precedente filone di ricerca (si vedano, ad esempio, [3, 6, 7, 8, 9]) che, nel contesto di sottoinsiemi K convessi e compatti di $\mathbb{R}^d$, ha permesso, tra l'altro, l'approssimazione costruttiva delle soluzioni di particolari problemi di diffusione associati ad operatori differenziali ellittici che degenerano su un sottoinsieme di ∂K.

Obiettivi del progetto

Seguendo l'idea descritta in [2, Section 5.2], il presente progetto di ricerca si vuole focalizzare sull'introdurre, in opportuni spazi di funzioni continue o integrabili, certi operatori integrali costruiti a partire dalla funzione di densità $f_{\alpha,\beta}$ (vedasi (1)). In particolare, si intende puntare l'attenzione sull'analisi delle proprietà di approssimazione di questi operatori, provando che costituiscono un processo di approssimazione in diversi spazi funzionali. Si cercherà di ottenere risultati in assetti molto generali, come ad esempio gli spazi di Orlicz ([20, 22]), gli spazi modulari ([16, 21]), i quali, come è noto, rappresentano una importante generalizzazione degli spazi L^p, e gli spazi di funzioni a variazione limitata ([12, 13, 14, 15]).

Si intende studiare le proprietà qualitative, di saturazione, e teoremi di approssimazione inversi per questi operatori; si vuole anche verificare che essi possano soddisfare una formula asintotica che coinvolga opportuni operatori differenziali. Ciò potrebbe rappresentare il punto di partenza per utilizzare l'analisi intrapresa al fine di studiare, attraverso la Teoria dei Semigruppi di operatori, le proprietà delle soluzioni di certi problemi di diffusione.

A tal proposito, all'interno del progetto (si vedano anche [11, 17, 18, 19]) si vogliono anche estendere, nel contesto di spazi di funzioni definite su intervalli J non compatti, alcuni risultati noti nel caso compatto, al fine di approssimare costruttivamente, tramite gli operatori C_n descritti in (2), opportuni semigruppi di operatori e, di conseguenza, le soluzioni dei problemi di diffusione ad essi collegati. In particolare, si vuole determinare se l'operatore differenziale

$$V(f) := \alpha f'' + \beta f' \quad (f \in C^2(J)), \tag{3}$$

ove, sotto opportune ipotesi di integrabilità per le funzioni coinvolte,

$$\alpha(x) := \frac{1}{2}\left(\int_J t^2 d\mu_x(t) - x^2\right)$$

e

$$\beta(x) = r\left(\lim_{n\to\infty}\int_J t\, d\mu_n(t) - x\right),$$

(pre)-genera, in opportuni spazi funzionali, un semigruppo di operatori che possa essere approssimato tramite gli operatori C_n, e studiare i problemi di diffusione ad esso associati. Questa analisi passa anche attraverso l'individuazione di opportuni core per l'operatore differenziale V.

Descrizione del gruppo di ricerca e delle sue competenze

Al fine di raggiungere gli obiettivi del progetto, saranno messe in campo le competenze scientifiche di tutti i ricercatori delle diverse sedi partecipanti al progetto e afferenti alle unità di ricerca INdAM di Bari (Università degli Studi di Bari), Firenze (Università degli Studi di Firenze), Lecce (Università del Salento), Perugia (Università degli Studi di Perugia) e Potenza (Università degli Studi della Basilicata).

Il punto di partenza per la composizione del gruppo di ricerca è stata la recente esperienza di condivisione nell'ambito delle attività del gruppo di lavoro dell'Unione Matematica Italiana di "Teoria dell'Approssimazione e Applicazioni (T.A.A.)".

Per raggiungere gli obiettivi del progetto, saranno di cruciale importanza le competenze maturate e consolidate negli anni nell'ambito della teoria dei semigruppi di operatori dai ricercatori delle unità di Bari, Lecce e Potenza. Inoltre, i ricercatori delle unità di Perugia e Firenze metteranno a disposizione la loro esperienza di ricerca nell'ambito dell'approssimazione in spazi funzionali astratti, come ad esempio spazi di Orlicz, spazi modulari e spazi di funzioni a variazione limitata.

Elementi di novità del progetto

Per quanto riguarda la prima linea di ricerca, il progetto si propone di introdurre un nuovo processo di approssimazione di tipo integrale basato sulla funzione di distribuzione $f_{\alpha,\beta}$ (vedasi (1)), che agisca su diversi spazi funzionali, anche molto generali. Si vuole comparare questi nuovi operatori con analoghi operatori costruiti a partire da altre funzioni di distribuzione, mostrando che le proprietà della $f_{\alpha,\beta}$ producono migliori risultati di approssimazione.

Riguardo alla seconda linea di ricerca, data la generalità degli operatori C_n (vedasi (2)) e dell'operatore differenziale V definito da (3), lo studio delle proprietà di (pre)-generazione di V su opportuni spazi di funzioni definite su intervalli non compatti di $\mathbb{R}$ e l'approssimazione del semigruppo generato tramite gli operatori C_n, oltre ad avere un interesse scientifico proprio, consentirebbe anche inglobare in una trattazione unitaria una serie di casi particolari noti in letteratura. Inoltre, il problema di determinare core per operatori differenziali del secondo ordine rappresenta una questione di interesse per la Teoria dei Semigruppi; i risultati che ci si aspetta di ottenere nell'ambito del progetto potrebbero fornire un contributo di novità in questo settore di ricerca.

Riferimenti bibliografici

[1] J. A. Adell, G. F. Badía, J. de la Cal, *Beta-type operators preserve shape properties*, Stoch. Proc. Appl. **48**(1) (1993), 1–8.

[2] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, de Gruyter Studies in Mathematics **17**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[3] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, S. Diomede, *Degenerate elliptic operators, Feller semigroups and modified Bernstein-Schnabl operators*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 5–6, 587–607.

[4] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, *On some approximation processes generated by integrated means on noncompact real intervals*, Results Math. **78** (2023) no. 6, Article Number: 250.

[5] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, *On some representation formulae for operator semigroups in terms of integrated mean*, Dolomites Res. Notes Approx., to appear.

[6] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *On differential operators associated with Markov operators*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3612–3631.

[7] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Rasa, Markov Operators, Positive Semigroups and Approximation Processes, de Gruyter Studies in Mathematics **61**, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2014.

[8] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *A generalization of Kantorovich operators for convex compact subsets*, Banach J. Math. Anal. **11**(3) (2017), 591–614.

[9] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *Elliptic differential operators and positive semigroups associated with generalized Kantorovich operators*, J. Math. Anal. Appl. **258**(1) (2018), 153–173.

[10] F. Altomare, S. Milella, *Integral-type operators on continuous function spaces on the real line*, J. Approx. Theory **152**(2) (2008), 107–124.

[11] F. Altomare, S. Milella, *On the C_0-semigroups generated by second order differential operators on the real line*, Taiwanese J. Math. **13**(1) (2009), 25–46.

[12] L. Angeloni, N. Çetin, D. Costarelli, A.R. Sambucini, G. Vinti, *Multivariate sampling Kantorovich operators: quantitative estimates in Orlicz spaces*, Constr. Math. Anal. **4**(2) (2021), 229–241.

[13] L. Angeloni, D. Costarelli, G. Vinti, *A characterization of the convergence in variation for the generalized sampling series*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43** (2018), 755–767.

[14] L. Angeloni, D. Costarelli, G. Vinti, *Quantitative estimates for sampling type operators with respect to the Jordan variation*, Atti Accad. Naz. dei Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Rend. Lincei Mat. Appl. **31** (2020), 269–284.

[15] L. Angeloni, N.J. Merentes, M.A. Valera-López, *Convolution Integral Operators in Variable Bounded Variation Spaces*, Mediterr. J. Math. **20**(3) (2023), Article Number: 141.

[16] L. Angeloni, G. Vinti, *Rate of approximation for nonlinear integral operators with application to signal processing*, Differ. Integral Equ. **18**(8) (2005), 855–890.

[17] A. Attalienti, M. Campiti, *Bernstein-type operators on the half line*, Czechoslovak Math. J. **52**(4) (2002), 851–860.

[18] M. Campiti, I. Raşa, C. Tacelli, *Steklov operators and semigroups in weighted spaces of continous functions*, Acta Math. Hungar. **120** (2008), no. 1–2, 103–125.

[19] M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, *Approximation of some Feller semigroups associated with a modification of Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, Acta Math. Hungar. **139** (2013), no. 3, 255–275.

[20] N. Cetin, D. Costarelli, M. Natale, G. Vinti, *Nonlinear multivariate sampling Kantorovich operators: quantitative estimates in functional spaces*, Dolomites Res. Notes Approx. **15**(3) (2022), 12–25.

[21] D. Costarelli, M. Natale, G. Vinti, *Convergence Results for Nonlinear Sampling Kantorovich Operators in Modular Spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **44**(12) (2023), 1276–1299.

[22] D. Costarelli, M. Piconi, G. Vinti, *On the convergence properties of Durrmeyer-Sampling type operators in Orlicz spaces*, Math. Nachr. **296** (2023), 588–609.

[23] M. E. Ghitany, B. Atieh, S. Nadarajah, *Lindley distribution and its application*, Math. Comput. Simul. **78** (2008), 493–506.

[24] M. Khalleefah, S. Ostrovska, M. Turan, *On the moment-determinacy of power Lindley distribution and some applications to software metrics*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **93** (2021), Paper No. e20191152, 12 pp.

[25] D. V. Lindley, *Fiducial distributions and Bayes' theorem*, R. Stat. Soc. Ser. A Stat. Soc. **20** (1958), 102–107.

[26] J. Mazucheli, M. E. Ghitany, F. Louzada, *Power Lindley distribution: different methods of estimations and their applications to survival times data*, J. Appl. Statist. Sci. **21**(2013), no.2, 135–144.