

Proposta Progetto di Ricerca GNAMPA 2020

Titolo del Progetto:
**Problemi di approssimazione costruttiva
in spazi di funzioni**

Responsabile del progetto:

**Dott.ssa Mirella Cappelletti Montano (Università degli Studi di
Bari "A. Moro")**

Partecipanti Strutturati:

**Prof. Francesco Altomare (Università degli Studi di Bari "A.
Moro")**

Prof. Michele Campiti (Università del Salento)

Dott.ssa Vita Leonessa (Università degli Studi della Basilicata)

Descrizione scientifica

Il presente progetto si propone di investigare alcune questioni riguardanti l'approssimazione costruttiva di funzioni, operatori, funzionali lineari positivi e semigrupp di operatori definiti su opportuni spazi di funzioni.

Tramite l'introduzione di opportune successioni di operatori, spesso di natura polinomiale, e utilizzando tecniche di Teoria dell'Approssimazione, non solo è possibile ricostruire funzioni, ma anche rappresentare semigrupp generati da certi operatori differenziali in termini delle iterate degli operatori approssimanti. In tal modo, si può pervenire a una rappresentazione delle soluzioni di particolari problemi differenziali associati al generatore del semigrupp. Attraverso lo studio delle proprietà qualitative degli operatori approssimanti, si possono poi determinare analoghe proprietà spaziali per tali soluzioni, oltre che il loro comportamento asintotico. Una base di parten-

za essenziale per trattare siffatte questioni è costituita dalle due monografie [4, 9], scritte dai partecipanti al presente progetto.

In particolare, dato un operatore di Markov T definito sullo spazio di Banach $C(K)$ delle funzioni reali e continue su un sottoinsieme convesso e compatto K di \mathbb{R}^d , recentemente, Francesco Altomare e la sua scuola hanno introdotto diverse successioni di operatori lineari e positivi (vedasi, ad esempio, i lavori [5], [7]-[12]), che hanno permesso l'approssimazione costruttiva sia di funzioni continue che delle soluzioni di particolari problemi di diffusione associati ad operatori differenziali ellittici che degenerano su un sottoinsieme della frontiera del dominio. Si sottolinea, inoltre, che le successioni di operatori studiate in questo contesto sono molto generali e includono, per particolari scelte dell'insieme K e dell'operatore T , molti processi di approssimazione ampiamente studiati in letteratura.

Tenuto conto del lavoro [13], si intendono introdurre nuove successioni di operatori lineari positivi che agiscono su spazi di funzioni continue con peso su intervalli non compatti o, più in generale, su sottoinsiemi convessi non compatti di \mathbb{R}^d . Si vuole poi utilizzare tali operatori per approssimare costruttivamente funzioni continue appartenenti a particolari spazi con peso e per rappresentare opportunamente le soluzioni di certi problemi differenziali. Per qualche lavoro in questa direzione vedasi, ad esempio, [2, 3, 6], [14]-[22].

Si intende altresì, portare avanti una attività di collaborazione recentemente instaurata con il Prof. Daniel Cárdenas-Morales della Università di Jaén (Spagna) e il Prof. Ioan Raşa del Politecnico di Cluj-Napoca (Romania), il cui scopo è estendere al caso del semplice multidimensionale K_d alcuni risultati contenuti in [24, 25] (vedasi, inoltre, [1, 23, 26]). Più precisamente, si vuole studiare l'ottimalità, nell'approssimare funzioni continue definite su K_d , di opportuni operatori lineari a tratti all'interno di una classe più generale di operatori positivi; ci si propone, inoltre, di caratterizzare, in termini degli operatori di Bernstein su K_d , particolari operatori lineari positivi su $C(K_d)$ che preservano le funzioni affini.

Il progetto non sarà solo rivolto allo studio di questioni relative a spazi di funzioni continue. Si vogliono, infatti, sviluppare dei criteri di convergenza per successioni di operatori e funzionali lineari positivi nel contesto di spazi di funzioni limitate che sono continue solo su prefissati sottoinsiemi del proprio dominio. L'obiettivo è investigare la possibilità di approssimare costruttivamente, tramite operatori o funzionali lineari positivi, funzioni non necessariamente continue e operatori o funzionali definiti su di esse.

Riferimenti bibliografici

- [1] J.M. Aldaz, H. Render, *Optimality of generalized Bernstein operators*, J. Approx. Theory **162** (2010), 1407–1416.
- [2] F. Altomare, R. Amiar, *Approximation by positive operators of the C_0 -semigroups associated with one-dimensional diffusion equations, I* Numer. Funct. Anal. Optim. **26** (2005), no. 1, 1–15.
- [3] F. Altomare, R. Amiar, *Approximation by positive operators of the C_0 -semigroups associated with one-dimensional diffusion equations, II* Numer. Funct. Anal. Optim. **27** (2006), no. 3–4, 497–498.
- [4] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, de Gruyter Studies in Mathematics **17**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [5] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, S. Diomede, *Degenerate elliptic operators, Feller semigroups and modified Bernstein-Schnabl operators*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 5–6, 587–607.
- [6] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, *On a generalization of Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, Results Math. **63** (2013) no. 3-4, 837–863.
- [7] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *On differential operators associated with Markov operators*, J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 6, 3612–3631.
- [8] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *On Markov operators preserving polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **415** (2014), no. 1, 477–495.
- [9] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Rasa, *Markov Operators, Positive Semigroups and Approximation Processes*, de Gruyter Studies in Mathematics **61**, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2014.
- [10] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *A generalization of Kantorovich operators for convex compact subsets*, Banach J. Math. Anal. **11** (3) (2017), 591–614.
- [11] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *Differential operators and approximation processes generated by Markov operators*,

In: Integral Methods in Science and Engineering, V. 1: Theoretical Techniques, pp. 9-19, Birkhäuser Verlag, 2017, ISBN 978-3-319-59384-5.

- [12] F. Altomare, M. Cappelletti Montano, V. Leonessa, I Raşa, *Elliptic differential operators and positive semigroups associated with generalized Kantorovich operators*, J. Math. Anal. Appl. **258** (1) (2018), 153–173.
- [13] F. Altomare, V. Leonessa, S. Milella, *Bernstein-Schnabl operators on non compact intervals*, Jaen J. Approx. **1** (2009), no. 2, 223–256.
- [14] F. Altomare, S. Milella, *On the C_0 -semigroups generated by second order differential operators on the real line*, Taiwanese J. Math. **13** (1) (2009), 25-46.
- [15] F. Altomare, S. Milella, *Degenerate differential equations and modified Szász-Mirakjan operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo **59** (2010), no. 2, 227–250.
- [16] F. Altomare, S. Milella, G. Musceo, *On a class of positive C_0 -semigroups of operators on weighted continuous function spaces*, Note Mat. **31** (2011), no. 1, 15–27.
- [17] F. Altomare, G. Musceo, *Markov processes and positive semigroups on some classes of weighted continuous function spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo **57** (2008), no. 1, 61–82.
- [18] F. Altomare, G. Musceo, *Positive semigroups generated by degenerate second-order differential operators*, Funkcial. Ekvac. **51** (2008), no. 3, 431–458.
- [19] A. Attalienti, M. Campiti, *Bernstein-type operators on the half line*, Czechoslovak Math. J. **52** (4) (2002), 851–860.
- [20] M. Campiti, I. Raşa, C. Tacelli, *Steklov operators and their associated semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) **74** (2008), no. 1–2, 171–189.
- [21] M. Campiti, I. Raşa, C. Tacelli, *Steklov operators and semigroups in weighted spaces of continuous functions*, Acta Math. Hungar. **120** (2008), no. 1–2, 103–125.
- [22] M.Cappelletti Montano, V.Leonessa, *Approximation of some Feller semigroups associated with a modification of Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, Acta Math. Hungar. **139** (2013), no. 3, 255–275.

- [23] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, I. Raşa, *Bernstein-type operators which preserve polynomials*, *Comput. Math. Appl.* **62** (1) (2011), 158–163.
- [24] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, I. Raşa, *Optimality of piecewise τ -linear interpolating operators*, *Appl. Math. Comput.* **219** (2013), 6445–6448.
- [25] J. de la Cal, J. Cárcamo, *An extremal property of Bernstein polynomials*, *J. Approx. Theory* **146** (2007), 87–90.
- [26] H. Gonska, P. Pişul, I. Raşa, *General King-type operators*, *Results Math.* **53** (2009), no. 3–4, 279–286.