

Introduzione alla Logica Matematica

Programma

Connettivi logici e tavole di verità. Congiunzione, disgiunzione, negazione. L'implicazione: il principio *ex falso quodlibet*, condizione necessaria e condizione sufficiente. La doppia implicazione o equivalenza. Forme proposizionali equivalenti. Negazione delle forme proposizionali congiuntive e disgiuntive. Negazione di un'implicazione. Tautologie e contraddizioni. Quantificatori universale ed esistenziale. Negazione delle proposizioni universali ed esistenziali.

Forma e ruolo della definizione. Forma generale dell'enunciato di un teorema: ipotesi e tesi. Esempi di dimostrazione e di confutazione, il controesempio. Dimostrazioni dirette, indirette per assurdo e a contrario. Forma e ruolo della caratterizzazione.

Insiemi definiti a partire da proprietà. Appartenenza di un elemento ad un insieme. Inclusione e uguaglianza come doppia inclusione. Inclusione stretta. Insiemi distinti. Unione, intersezione, differenza. Insiemi complementari. L'insieme vuoto. Insiemi disgiunti. Diagrammi di Eulero-Venn. Dimostrazione di alcune semplici relazioni e identità insiemistiche. Enunciati del principio del minimo e del principio di induzione con esempi di applicazione alla dimostrazione di proposizioni aritmetiche. Importanza della base dell'induzione.

Relazioni tra gli elementi di due insiemi. Relazioni binarie su un insieme. Relazioni riflessive, simmetriche, antisimmetriche e transitive. Relazioni d'ordine e di equivalenza. Classi di equivalenza e proprietà. Partizioni. Insieme quoziante come partizione. Relazione di equivalenza individuata da una partizione.

Relazioni funzionali e funzioni; grafico di una funzione. Esempi fondamentali: funzione identica e funzione costante. Immagine diretta e immagine reciproca di un sottoinsieme; proprietà. Funzioni ingettive e caratterizzazioni. Ingezione canonica. Funzioni surgettive: definizione e caratterizzazioni. Esempi: la surgettione canonica sull'insieme quoziante. Funzioni bigettive e caratterizzazioni. Composizione di funzioni. Proprietà della composizione di funzioni. Funzioni invertibili. Funzione inversa di una funzione. Caratterizzazione delle funzioni invertibili.

Cardinalità degli insiemi finiti. Gli insiemi infiniti. Prodotto cartesiano di insiemi. Cardinalità del prodotto cartesiano di una famiglia finita di insiemi finiti. Permutazioni di n elementi. Formula ricorsiva per $n!$. Disposizioni senza ripetizione e combinazioni di n elementi k a k . L'insieme delle parti di un insieme e la sua cardinalità nel caso finito (dimostrazione per induzione della formula). Il triangolo aritmetico. Il ruolo combinatorio dei coefficienti binomiali nel teorema del binomio di Newton. Cenni di aritmetica binaria.