CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

Appello del 5 giugno 2019

1. Data in S_{18} la permutazione

$$\alpha = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9,10,11)(12,13,14)(15,16)(17,18),$$

per ogni $\sigma \in S_{18}$ si consideri l'insieme $H(\sigma) = \{\tau \in \langle \alpha \rangle \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.
Si determini $H(\sigma)$ per

(a) $\sigma = (1,9,4,8,3,11,2,10)$;
(b) $\sigma = (5,6,7)(12,14,13)$;
(c) $\sigma = (15,17)(16,18)(1,4,3,2)$.

2. Dato un intero $n > 1$, si considerino le applicazioni

$$\begin{array}{ll} \varphi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{2n}, & \psi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{4n}, \\ [a]_n \mapsto [a^2]_{2n} & [a]_n \mapsto [a^4]_{4n} \end{array}$$

(a) Determinare tutti i valori di n per i quali φ_n è ben definita.
(b) Determinare tutti i valori di n per i quali ψ_n è ben definita.
(c) Determinare $\psi_{40}^{-1}([0]_{160})$.

3. Sia p un numero primo della forma $2^{2^N}+1$, ove N è un opportuno intero positivo. Provare che il polinomio $f(x) = x^{3p} + x^{2p} + x^p + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ si decompone in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.