CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2018/19

Appello del 12 febbraio 2019

1.

(a) Sia n un intero positivo. Si consideri l'insieme $H = \{\sigma \in A_n \mid \mathrm{o}(\sigma) \leq 2\}$. Determinare tutti i valori di n per i quali H è un sottogruppo di A_n e dire in quali casi non è banale.
(b) Determinare un sottogruppo di A_{12} avente ordine 16.
(c) Determinare un sottogruppo di A_{10} avente ordine 6.

2. Dati gli interi positivi n e m, si consideri l'applicazione

$$\varphi_{n,m} : \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{n,m}([a]_{10}, [b]_{25}) = ([na]_5, [mb]_5)$.

(a) Determinare il numero delle applicazioni $\varphi_{n,m}$ che sono omomorfismi di anelli.
(b) Determinare tutte le coppie (n, m) per le quali ${\varphi_{n,m}}^{-1}([0]_5, [0]_5)$ ha esattamente 10 elementi.
(c) Determinare tutte le coppie (n, m) per le quali $\varphi_{n,m}$ è surgettiva.

3. Dato un primo positivo p, siano $f(x) = x^{p^2} + x^p - 928$ e $g(x) = x^{2p} + x^2 - 928$, e siano $\overline{f}(x), \overline{g}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ le loro riduzioni modulo p. Determinare tutti i valori di p per i quali $\overline{f}(x)$ e $\overline{g}(x)$ hanno in $\mathbb{Z}_p$ una radice comune non nulla.