CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2018/19

Appello del 9 gennaio 2019

1. Siano date in S_{17} le permutazioni

$$\begin{aligned}\sigma &= (1,2,3,4,5,6)(10,11,12)(13,14,15,16,17)\\ \tau &= (6,7,8,9)(13,15,14,17,16).\end{aligned}$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle$.

Sia H un sottogruppo di S_{17} a cui appartengono σ e τ.
(b) Provare che H contiene almeno 3 distinti sottogruppi di ordine 3.
(c) Provare che H contiene almeno 2 distinti sottogruppi di ordine 9.

2. Siano n ed m interi maggiori di 1, e sia data l'applicazione

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{100} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$$

tale che, per ogni $a \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi([a]_{100}) = ([a]_n, [a]_m).$$

(a) Determinare tutte le coppie (n,m) per le quali φ è ben definita.
(b) Determinare tutte le coppie (n,m) per le quali φ è surgettiva.
(c) Per $n=4, m=5$, determinare $\varphi^{-1}([1]_4,[2]_5)$.

3. Sia p un numero primo positivo, e sia $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Sia inoltre $f(x) = x^{p^2-1} + x^p + \alpha \in \mathbb{Z}_p[x]$.
Determinare, al variare di p, tutti gli $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ tali che $f(x)$ abbia in $\mathbb{Z}_p$ una ed una sola radice.