CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

Appello del 25 settembre 2018

1. Siano date in S_{17} le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9),$$
$$\tau = (14,15)(16,17).$$

(a) Provare che in S_{17} esistono almeno $33 \cdot 8!$ permutazioni che commutano con σ.
(b) Determinare un sottogruppo di S_{17} di ordine 144 a cui appartengano σ e τ.
(c) Determinare un sottogruppo di S_{17} di ordine $9 \cdot (8!)^2$ a cui appartengano σ e τ.

2. Sia n un intero positivo, e sia data l'applicazione

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{15}$$

$$\left([a]_{20}, [b]_{15}\right) \mapsto \left(n^2 [a]_{20}, n[b]_{15}\right)$$

(a) Determinare tutti i valori di n per i quali φ è un omomorfismo di anelli.
(b) Determinare tutti i valori di n per i quali φ è un isomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo positivo.
(a) Determinare, al variare di p, il numero delle radici (distinte) in $\mathbb{Z}_p$ del polinomio $f(x) = x^{(p+1)^2} - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.
(b) Determinare un massimo comune divisore dei polinomi $g(x) = x^{7056} - \overline{1} \in \mathbb{Z}_{83}[x]$ e $h(x) = x^3 - \overline{2}x^2 - x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_{83}[x]$.