CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

Appello del 5 luglio 2018

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{16} :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14,15),$$
$$\tau = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)(10,11,12,13,14,15,16).$$

   (a) Dimostrare che se un sottogruppo H di S_{16} contiene $\{\sigma,\tau\}$, allora H ha un sottogruppo di ordine 27.

   (b) Dimostrare che se un sottogruppo K di S_{16} contiene $\{\sigma,\tau\}$, allora K ha almeno 3 distinti sottogruppi di ordine 9.

2. Provare che l'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$ possiede, tra i suoi sottoinsiemi di cardinalità 3,

   (a) un sottoanello che è un campo,

   (b) un sottoanello che non è un campo,

   (c) un sottogruppo che non è un sottoanello.

3. Si consideri il polinomio $f(x) = x^8 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Provare che la riduzione di $f(x)$ modulo 4481 si decompone in $\mathbb{Z}_{4481}[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

   (b) Determinare una fattorizzazione in $\mathbb{Z}_{101}[x]$ della riduzione di $f(x)$ modulo 101.