**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**

# Algebra n.1

**Anno Accademico 2017/18**

**<u>Appello del 20 giugno 2018</u>**

1. Siano date le seguenti permutazioni di $S_{28}$ :

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10),$$
$$\tau = (24,18,11,26,14,28,\mathbf{1},21,16,19,23,27,13,17,12,\mathbf{4},22,25,15,20),$$
$$\rho = (24,18,11,26,14,28,\mathbf{1},21,16,19,23,27,13,17,12,22,\mathbf{6},25,15,20).$$

Siano inoltre
- $H$ un sottogruppo di $S_{28}$ tale che $\{\sigma,\tau\} \subset H$,
- $K$ un sottogruppo di $S_{28}$ tale che $\{\sigma,\rho\} \subset K$.

(a) Determinare un sottogruppo ciclico di $H$ avente ordine 9.
(b) Determinare un sottogruppo non ciclico di $K$ avente ordine 4.

2.

(a) Provare che non esiste alcun monomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.
(b) Provare che non esiste alcun epimorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9$.
(c) Provare che l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ non ha, tra i suoi sottoanelli unitari, alcun campo di ordine 9.

3. Sia $p > 2$ un numero primo. Si consideri il polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Provare che, se $\alpha$ genera il gruppo $\mathbb{Z}_p^*$, allora $f(\alpha) = [1]_p$.
(b) Per $p = 7$, determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.