CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

Appello del 20 aprile 2018

1. Sia $\alpha \in S_9$. Si considerino inoltre le seguenti permutazioni di S_9:

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9),$$
$$\tau = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9).$$

   (a) Provare che se α commuta con σ, allora α commuta anche con (1,2,3).
   (b) Provare o confutare la seguente affermazione: se α commuta con τ, allora α commuta anche con (1,2,3).
   (c) Determinare un sottogruppo di S_9 avente ordine $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ e al quale appartengano σ e τ.

2. Siano *n* ed *m* numeri interi coprimi.
   (a) Provare che se 6 divide *n*, allora 72 divide $n(m^2 - 1)$.
   (b) Provare che se 72 divide *nm*, allora 6 divide $(n^2 - 1)(m^2 - 1)$.

3. Sia *p* un *primo di Mersenne*, ossia un numero primo avente la forma $2^N - 1$, ove *N* è un primo positivo. Si consideri il polinomio $f(x) = x^{p^2+1} + x^{p+1} - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.
   (a) Determinare, al variare di *p*, il numero delle radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$.
   (b) Per $p = 3$, posto $g(x) = x^6 + x^3 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$, determinare $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.