CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

Appello del 24 gennaio 2018

1. Siano date in S_{11} le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6,7)(8,9,10,11),$$
$$\tau = (4,8,5,9,6,10,7,11).$$

(a) Determinare l'insieme $H = \left\{\alpha \in \langle\sigma\rangle \middle| \langle\alpha\rangle \cap \langle\tau\rangle \neq \{\mathrm{id}\}\right\}$.

(b) Determinare in S_{11} un sottogruppo ciclico contenente $\langle\sigma\rangle \cup \langle\tau\rangle$.

2. Siano dati interi positivi *n* ed *m*.

(a) Provare che *nm* e $n+m$ sono coprimi se e solo se *n* e *m* sono coprimi.

(b) Provare che *nm* divide n^2+m^2 se e solo se $n=m$.

(c) Determinare tutti i valori di *n* e *m* per i quali $2^{m^n} \equiv 1 \pmod 5$.

3. Si consideri il polinomio $f(x) = x^6 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Dato un primo positivo *p*, sia $\overline{f(x)}$ la sua riduzione modulo *p*.

(a) Provare che se $p \equiv 2 \pmod 3$, $\overline{f(x)}$ non si decompone in $\mathbb{Z}_p[x]$ nel prodotto di fattori lineari.

(b) Provare che se $p \equiv 1 \pmod 3$, $\overline{f(x)}$ ha in $\mathbb{Z}_p$ almeno 4 radici distinte.