CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2017/18

<u>Appello del 9 gennaio 2018</u>

1. Siano date in S_{20} le permutazioni

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8)(9,10,11,12)(13,14,15,16,17),$$
$$\tau = (13,17,16,15,14)(18,19,20).$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.

(b) Determinare in S_{20} un sottogruppo ciclico contenente $\langle\sigma\rangle \cup \langle\tau\rangle$.

(c) Determinare in S_{20} un sottogruppo di ordine 960 contenente $\langle\sigma\rangle \cup \langle\tau\rangle$.

2. Dati interi positivi n ed m, si consideri l'applicazione

$$\varphi_{n,m} : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{n^2} \times \mathbb{Z}_{m^2}$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_{n,m}([a]_n, [b]_m) = ([2na]_{n^2}, [3mb]_{m^2})$$

(a) Determinare tutti i valori di n ed m per i quali $\varphi_{n,m}$ è iniettiva.

(b) Determinare tutti i valori di n ed m per i quali $\varphi_{n,m}$ è un omomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo positivo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^{p^4 - p^3} - [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Determinare tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$, con le rispettive molteplicità.

(b) Dato il polinomio $g(x) = x^{p+1} + [2]_p x \in \mathbb{Z}_p[x]$, si determini, al variare di p, $\mathrm{MCD}(f(x), g(x))$.