

**CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA**  
**Algebra n.1**  
**Anno Accademico 2016/17**

**Appello del 21 giugno 2017**

1. Sia data la seguente permutazione di  $S_{13}$  :

$$\sigma = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8).$$

- (a) Determinare tutte le strutture cicliche delle permutazioni  $\alpha$  di  $S_{13}$  tali che  $\alpha^6 = \sigma$ .
  - (b) Dimostrare che  $\sigma$  non appartiene ad alcun sottogruppo ciclico di  $S_{13}$  avente ordine 60.
  - (c) Determinare un sottogruppo di  $S_{13}$  di ordine 1920 a cui appartiene  $\sigma$ .
2. Sia  $n$  un intero e si ponga  $N = n^3 + 3n^2 - 4n$ .
- (a) Determinare tutti i valori di  $n$  per i quali  $N \equiv 0 \pmod{150}$ .
  - (b) Determinare tutti i valori di  $n$  per i quali  $N \equiv 6 \pmod{150}$ .
  - (c) Determinare, al variare di  $n$  in  $\mathbb{N}^*$ , la cifra delle unità della rappresentazione decimale di  $n^{103} - n^{86} + 4n^{18} + 798656n$ .
3. Sia  $p$  un numero primo maggiore di 2. Provare che  $f(x) = x^{p^2} - x^p + x^2 - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$  non ha radici multiple in  $\mathbb{Z}_p$ .