CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

Appello del 7 giugno 2017

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{18} :

$\sigma = (1,2,3,4)(5,6)(7,8,9)(10,11,12,13)(14,15,16)(17,18)$
$\tau = (5,6)$.

(a) Dimostrare che non esiste alcun sottogruppo ciclico di S_{18} contenente $\{\sigma,\tau\}$.
(b) Determinare un sottogruppo ciclico di S_{18} avente ordine 24 e al quale appartiene σ.

2. Sia λ un intero e si consideri l'applicazione

$$\varphi_\lambda : \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{20}$$
$$[x]_{10} \mapsto [\lambda x^2]_{20}$$

(a) Determinare tutti i valori di λ per i quali φ_λ è ben definita.
(b) Determinare tutti i valori di λ per i quali φ_λ è un omomorfismo di gruppi additivi.
(c) Determinare tutti i valori di λ per i quali φ_λ è un omomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo positivo. Sia $f(x) = x^{p^3-p^2} - x^2 + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Determinare il numero delle radici in $\mathbb{Z}_p$ della riduzione di $f(x)$ modulo p.
(b) Provare che, per $p = 5$, almeno una delle radici è semplice (suggerimento: determinare preliminarmente tutte le radici).