CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

Appello del 20 febbraio 2017

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{17}:

$$\sigma = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)(11,12,13,14)(15,16,17)$$
$$\tau = (1,2,11,9,10,12,7,8,13,5,6,14,3,4,15)$$

(a) Determinare $\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle$.

(b) Sia H un sottogruppo di S_{17} a cui appartengono σ e τ. Provare che ad H appartiene un 5-ciclo.

2. Sia A l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Sia inoltre B il sottoanello di A i cui elementi sono le matrici diagonali.

(a) Dato un intero λ, si consideri l'applicazione $\varphi: U(A)\to U(\mathbb{Z}_{15})$ definita ponendo $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [\lambda(ad-bc)]_{15}$. Determinare tutti i valori di λ per i quali φ è un omomorfismo di gruppi.

(b) Dato un intero μ, si consideri inoltre l'applicazione $\psi: B\to\mathbb{Z}_{15}$ definita ponendo $\psi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = [\mu a]_{15}$. Determinare tutti i valori di μ per i quali ψ è un omomorfismo di gruppi additivi suriettivo.

(c) Determinare tutti i valori di μ per i quali ψ è un omomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo positivo. Sia $f(x) = x^{p^3} - x^{p^2} + x^p - \overline{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$.

(a) Determinare tutte le radici di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p$ con le rispettive molteplicità.

(b) Per $p=2$, determinare una fattorizzazione di $f(x)$ in $\mathbb{Z}_2[x]$.