CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2016/17

Appello del 6 febbraio 2017

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{14} :

$$\sigma = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9,10)(11,12,13,14),$$
$$\tau = (1,4,2,5,3,6)(7,9,8,10)(11,12)(13,14).$$

(a) Determinare tutti gli interi n tali che $\langle \sigma^n \rangle \cap \langle \tau \rangle$ non sia il sottogruppo banale.

(b) Dimostrare che, se H è un sottogruppo di S_{14} contenente $\{\sigma, \tau\}$, allora ad H appartiene la permutazione (7,10)(8,9)(11,13)(12,14).

(c) Dedurne che H possiede un sottogruppo non ciclico di ordine 4.

2. Sia n un intero e sia $N = n^{4002} - n^{4001} + 10070304050877n$.

(a) Determinare tutti valori di n per i quali 6 divide N.

(b) Determinare tutti valori di n per i quali 25 divide N.

3. Sia p un numero primo maggiore di 2. Determinare tutte le radici in $\mathbb{Z}_p$ del polinomio $f(x) = x^{2p^2-2} + x^{p-3} + [p-2]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$.