

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2015/16

Appello del 26 settembre 2016

1. Siano date le seguenti permutazioni di S_{17} :

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)(8, 9, 10, 11, 12)(13, 14), \\ \tau &= (4, 6)(5, 7)(13, 14)(15, 16, 17).\end{aligned}$$

- (a) Determinare $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.
- (b) Dimostrare che, se H è un sottogruppo di S_{17} contenente $\{\sigma, \tau\}$, allora ad H appartiene un 4-ciclo.

2. Siano a, b interi e si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \\ ([x]_3, [y]_4) &\mapsto ([ax]_{12}, [by]_{12})\end{aligned}$$

- (a) Determinare tutte le coppie (a, b) tali che φ sia un omomorfismo di gruppi.
- (b) Determinare tutte le coppie (a, b) tali che φ sia un omomorfismo di anelli.
- (c) Trovare una coppia (a, b) tale che φ sia un monomorfismo di anelli.

3. Sia p un numero primo maggiore di 2. Determinare il numero delle radici in \mathbb{Z}_p di ciascuno dei seguenti polinomi:

- (a) $x^{\frac{p-1}{2}} - [1]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$;
- (b) $x^{\frac{p-1}{2}} + [3]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$.