CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

<u>Appello del 6 luglio 2016</u>

1. Per ogni $\alpha \in S_{15}$, definiamo $C(\alpha) = \{\beta \in S_{15} \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}$. Siano inoltre

$$\sigma = (1,2,3,4,5)(6,7,8)(9,10,11,12) \in S_{15},$$
$$\tau = (1,3,2,5,4)(6,7,8)(9,11)(10,12)(13,14,15) \in S_{15}.$$

   (a) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap \langle\tau\rangle$.
   (b) Determinare $\langle\sigma\rangle \cap C(\tau)$.

2. Sia $N = n^6 - 2n^5 - n^2 + 2n.$

   (a) Determinare tutti gli interi n per i quali 404 divide N.
   (b) Determinare tutti gli interi n per i quali 25 divide N.

3. Sia p un numero primo positivo. Sia, inoltre, $f(x) = x^{p^2-2p} - x^p \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Determinare, al variare di p, il numero delle radici **distinte** che la riduzione di $f(x)$ modulo p possiede in $\mathbb{Z}_p$.
   (b) Per $p = 5$, dire se una di queste radici è semplice.
   (c) Per $p = 7$, dire se tale riduzione si decompone in $\mathbb{Z}_7[x]$ nel prodotto di fattori lineari.