CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

Appello del 22 giugno 2016

1. Per ogni $\alpha \in S_{11}$, definiamo $C(\alpha) = \{\beta \in S_{11} \mid \alpha\beta = \beta\alpha\}$. Siano inoltre

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7) \in S_{11},$$
$$\tau = (1,3)(2,4)(9,8,10,11) \in S_{11}.$$

   (a) Dire se $C(\sigma)$ è un sottogruppo commutativo di S_{11}.
   (b) Provare che $C(\sigma) \cap C(\tau)$ non è un sottogruppo ciclico di S_{11}.

2. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{48}$ definita ponendo, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi(a) = ([5a]_6, [4a]_{48})$.

   (a) Determinare $\varphi^{-1}([4]_6, [32]_{48})$.
   (b) Determinare un sottoanello B di $\mathbb{Z}$ tale che la restrizione di φ a B sia un omomorfismo di anelli non nullo.
   (c) Sia n un intero positivo. Si consideri l'applicazione $\varphi_n : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{48}$ definita ponendo, per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi_n([a]_n) = \varphi(a)$. Determinare tutti i valori di n per i quali l'applicazione φ_n è ben definita.

3. Sia p un numero primo positivo. Sia, inoltre, $f(x) = x^{3p} + 58x^{2p} + 517x^p \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Dimostrare che, per ogni p, la riduzione di $f(x)$ modulo p possiede in $\mathbb{Z}_p$ almeno due radici distinte.
   (b) Determinare tutti i valori di p per i quali la riduzione di $f(x)$ modulo p possiede in $\mathbb{Z}_p$ una radice di molteplicità $2p$.