CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

<u>Appello dell'8 giugno 2016</u>

1. Sia $\sigma=(1,2,3)(4,5,6)\in S_{10}$, e sia $S=\left\{\alpha\in S_{10}\middle|\alpha^2=\sigma\right\}$.

   (a) Determinare tutti i periodi degli elementi di S.
   (b) Provare che S ha almeno 20 elementi.
   (c) Dedurne che in S_{10} esistono almeno 212 elementi che commutano con σ.

2. Per ogni coppia di interi (a,b) si considerino l'insieme

$$M_{a,b}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & t\end{pmatrix}\middle| t\in\mathbb{Z}\right\}$$

   e l'applicazione $\varphi: M_{a,b}\to\mathbb{Z}_3$ definita ponendo, per ogni $A\in M_{a,b}$, $\varphi(A)=[\det(A)]_3$.

   (a) Dire per quali coppie di interi (a,b) l'applicazione φ è suriettiva.
   (b) Per $a=b=1$, determinare $\varphi^{-1}(U(\mathbb{Z}_3))$.

3. Siano p un numero primo positivo ed a un intero. Sia, inoltre, $f(x)=x^{2p-2}+x^{p-2}-a\in\mathbb{Z}[x]$.

   (a) Per ogni p, determinare tutti i valori di a tali che la riduzione di $f(x)$ modulo p abbia una radice in $\mathbb{Z}_p$.
   (b) Per $p=3$ ed $a=2$, determinare una fattorizzazione della riduzione di $f(x)$ modulo 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$.