

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
Algebra n.1
Anno Accademico 2015/16

Appello del 15 aprile 2016

1. Sia $\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13) \in S_{13}$.
 - (a) Determinare un sottogruppo H di S_{13} avente ordine 15 e tale che $H \cap \langle \sigma \rangle$ non sia il sottogruppo banale.
 - (b) Determinare un sottogruppo K di S_{13} avente ordine 16 e tale che $K \cap \langle \sigma \rangle$ non sia il sottogruppo banale.
2.
 - (a) Determinare tutti i numeri interi n per i quali $n^5 - n^3$ è divisibile per 100.
 - (b) Determinare tutti i numeri interi n per i quali $n^5 - n^3$ è divisibile per 1024.
3. Sia p un numero primo positivo e sia $f(x) = x^{p^2} + x^p - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.
 - (a) Provare che il polinomio $g(x) = \bar{2}x^p - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$ divide la riduzione di $f(x)$ modulo p .
 - (b) Per $p = 3$, determinare una fattorizzazione della riduzione di $f(x)$ modulo 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$.
 - (c) Determinare una fattorizzazione di $x^4 + x^2 - 1$ in $\mathbb{R}[x]$.