CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Algebra n.1

Anno Accademico 2015/16

<u>Appello del 12 febbraio 2016</u>

1. Siano date, in S_6, le seguenti permutazioni:

$$\sigma = (1,2,3), \quad \tau = (4,5,6).$$

   (a) Provare che non esiste alcun sottogruppo ciclico di S_6 a cui appartengano σ e τ.

   (b) Determinare un sottogruppo commutativo di S_6 a cui appartengano σ e τ.

   (c) Determinare un sottogruppo di S_6 avente ordine 36 a cui appartengano σ e τ.

2. Siano λ, μ interi e si consideri l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{24}$$

tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, $\varphi([a]_4, [b]_6) = [\lambda a + \mu b]_{24}$.

   (a) Determinare tutte le coppie di interi (λ, μ) per le quali φ è un'applicazione ben definita.

   (b) Determinare tutte le coppie di interi (λ, μ) per le quali φ è un omomorfismo di anelli ben definito.

3. Sia $f(x) = 124573x^3 + 5626x^2 - 90321x - 763342 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (a) Dire se $[x^2 - 2x + 1]$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Q}[x] / (f(x))$.

   (b) Indicata con $\overline{f}(x)$ la riduzione di $f(x)$ modulo 3, dire se $[x^2 + \overline{1}]$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_3[x] / (\overline{f}(x))$, e in caso affermativo determinare il suo inverso.